

Bachelor-Arbeit

Institut für Theoretische Physik - Computational Physics

Fouriertransformationen

Goran Lovrić

Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dr.techn. Heinrich Sormann

Sommersemester 2007

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Historischer Überblick	5
3. Analytische Behandlung	6
3.1. Mathematische Grundlagen	6
3.2. Fourierreihen	12
3.2.1. Definition der Fourierreihe	12
3.2.2. Berechnung der Fourierkoeffizienten	13
3.2.3. Bedeutung der Fourierkoeffizienten	18
3.2.4. Eigenschaften der Fourieranalyse	19
3.2.5. Gibbsches Phänomen	21
3.3. Fouriertransformation (FT)	24
3.3.1. Herleitung und Definition	24
3.3.2. Eigenschaften	28
3.3.3. Faltung und Entfaltung	30
3.3.4. Korrelation	33
3.4. Diskrete Fouriertransformation (DFT)	35
3.4.1. Herleitung und Definition	35
3.4.2. Eigenschaften der <i>DFT</i>	38
3.4.3. Faltung, Korrelation, Parsevals Theorem	41
3.4.4. Nyquist-Shannon-Abtasttheorem, Aliasing	42
3.4.5. Zero-Padding	44
3.4.6. Schnelle Fouriertransformation (FFT)	45
4. Anwendungsmöglichkeiten der Fouriertransformation	48
4.1. FT in der analytischen Mathematik	49
4.1.1. Beispiel: Diffusionsgleichung	50
4.2. FT bei numerischer Auswertung	52
4.2.1. Beispiel: Spektralanalyse	52
4.2.2. Beispiel: Rauschverminderung	55
4.2.3. Beispiel: Kreuzkorrelation	58
5. Zusammenfassung	62
A. Literaturverzeichnis	63

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit über die Fouriertransformationen soll zum einen die theoretischen Überlegungen rund um diese Thematik klären und zum anderen anhand ein paar konkreter Beispiele einige brauchbare Methoden vorstellen, die gerade in der Technik Anwendung finden. Angefangen mit einem historischen Überblick über die theoretische Erschließung dieser Thematik gliedert sich die restliche Arbeit grob in zwei größere Teile.

Im ersten Teil wird beginnend mit dem Kapitel über die mathematischen Grundlagen das mathematische Werkzeug in Form von Definitionen und Sätzen (meist ohne Beweise) erklärt, wobei einige grundlegende Begriffe wie etwa die Riemann-Integrierbarkeit vom Leser bereits als bekannt angenommen werden. In der Folge werden die Fourieranalyse, die (kontinuierliche) Fouriertransformation sowie die diskrete Fouriertransformation durchgenommen, in denen nicht nur deren Definitionen und Eigenschaften erläutert, sondern auch deren Verwandtschaft untereinander aufgezeigt werden sollen.

Der zweite große Teil widmet sich den Anwendungsmöglichkeiten in der Wissenschaft und Technik und versucht durch einige konkrete Beispiele einen groben Überblick über die verschiedenen Einsatzmöglichkeiten der Fouriertransformationen zu schaffen.

Zur Form und Notation der mathematischen Symbolik lässt sich allgemein sagen, dass diese so gewählt wurde, um von Anfang eine möglichst einheitliche Schreibweise zu gewährleisten. Dadurch, dass man bei unterschiedlicher Wahl der Literatur stets alternativen Definitionen und Formulierungen begegnet und diese sehr uneinheitlich sind, ist diese Entscheidung keine schwerwiegende. Es sollte daher für den Leser klar sein, sich bei Verwendung anderer Literatur die dortigen Definitionen und Sätze genauer anzuschauen.

Beweise werden nicht genau durchgemacht, da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit bei der Physik liegt; allerdings wird versucht, die allgemeinen mathematischen Zusammenhänge darzustellen und zu begründen.

Bei der Abfassung dieser Arbeit wurde - vor allem was den mathematischen Teil angeht - hauptsächlich nach den Lehrbüchern zur Analysis von Königsberger (siehe Ref. [1] und Ref. [2]) verfahren.

2. Historischer Überblick

Bevor an das eigentliche Thema dieser Arbeit herangegangen wird, soll nachfolgend zunächst ein historischer Überblick mit der damit verbundenen Bedeutung für die Analysis gegeben werden. Die verwendeten Termini *technici* werden hierbei als bekannt angenommen, können allerdings in den späteren Kapiteln nachgeschlagen werden.

Die Beobachtung periodischer Vorgänge in der Natur reicht zurück bis zu den ersten Hochkulturen, also jener Zeit, als der Mensch begann, Vorgänge in der Natur qualitativ und quantitativ zu beschreiben. Ziel der damaligen Forschung war es, Gesetzmäßigkeiten herauszufinden, denen 'natürliche' Vorgänge unterliegen, um damit Voraussagen für die Zukunft treffen zu können.

Bereits die ersten Erklärungen zur Planetenbewegung am Sternenhimmel nahmen mehrere zusammengesetzte Kreisbewegungen als gegeben an. Mathematisch gesehen wurde also schon sehr früh mit Summen trigonometrischer Funktionen gearbeitet (siehe z.B. Epizykeltheorie), allerdings erlangte diese Thematik erst zur Zeit der großen Mathematiker (etwa um das 18. Jahrhundert) und somit im Zuge der Entwicklung der modernen Analysis eine angemessene Bedeutung.

Um diese Zeit herum beschäftigten sich Daniel Bernoulli (1700-1782) und Leonhard Euler (1707-1783) mit trigonometrischen Reihen zur Behandlung der schwingenden Saite oder etwa der Fortpflanzung von Schallwellen in einem elastischen Medium. Den eigentlichen Anstoß zur Entwicklung der gesamten Theorie rund um die Fourieranalyse und Fouriertransformation erbrachte aber Joseph Fourier (1768-1830) in seinem Buch *La Théorie analytique de la chaleur* im Jahre 1822. Obwohl Fourier selbst noch viele Fragestellungen offen lies, ist es an dieser Stelle doch wichtig zu sagen, dass gerade die intensive Beschäftigung mit trigonometrischen Reihen durch nachfolgende Mathematiker ebenso zentrale Begriffe und Definitionslücken der Analysis klären konnte.

In der Folge beschäftigten sich eine Reihe Mathematiker mit der Fourieranalyse und der Fouriertransformation bzw. allgemein mit der Approximation von (periodischen) Funktionen (durch trigonometrische Polynome), von denen einige bei den jeweiligen mathematischen Sätzen erwähnt werden. Nennenswert ist an dieser Stelle aber C.F. Gauß (1777-1813), der bereits Vorarbeit zur diskreten Fouriertransformation (wie sie in Kap.3.4 behandelt wird) leistete, indem er eine Formel für die diskrete Fouriertransformation fand und auch den Grundstein für die später publizierte schnelle Fouriertransformation legte. Der heute unter diesem Namen verwendete Algorithmus geht aber auf J.W. Cooley und J.W. Tukey zurück und wurde im Jahre 1965 publiziert. Gerade durch diesen Algorithmus und die mittlerweile enorm angewachsene Rechnerleistung zur numerischen Auswertung von (Mess-)Daten verschiedenster Art hat die Fouriertransformation heute ihre eigentliche Bedeutung in der Technik erlangt.

Interessant ist allerdings auch die Jahrhunderte lange Beschäftigung mit der Beweisführung und der Theorie rund um diese Thematik (die teilweise noch bis heute andauert). So mussten zunächst Begriffe wie etwa die Stetigkeit oder der einer reellen Funktion genauer definiert werden, bevor etwa allgemeine Eigenschaften der Fourieranalyse angestellt werden konnten.

3. Analytische Behandlung

Grenzprozesse zusammen mit dem Grenzwertbegriff, der das Hauptwerkzeug der Analysis darstellt, spielen eine überaus wichtige Rolle in der Mathematik und vor allem den Anwendungen in der Technik. Gerade bei der numerischen Auswertung ist es in den meisten Fällen einfacher, von vornherein ein vereinfachendes (approximierendes) Modell zu verwenden; andererseits können analytische Lösungen oft auch gar nicht bestimmt werden, weshalb man wieder auf vereinfachende Konzepte zurückgreifen muss. So ist zum Beispiel in vielen Problemstellungen die lokale Approximation von Funktionen durch Taylor-Polynome ein essentielles Werkzeug; analog dazu lassen sich periodische Funktionen unter gewissen Voraussetzungen durch Fourierreihen darstellen und daraus ableitbar sind eine Reihe natürlicher Gesetzmäßigkeiten und technischer Anwendungsmöglichkeiten. Bevor auf die eigentliche Definition eingegangen wird, sollen zunächst einige mathematische Grundbegriffe und Sätze, die für dieses Thema vonnöten sind, geklärt werden.

3.1. Mathematische Grundlagen

Ausgangsbasis zur Formulierung der mathematischen Grundlagen sind zunächst allgemeine Definitionen und Sätze bis hin zur Definition des *trigonometrischen Polynoms* und der Behandlung seiner Eigenschaften. Vorab sei gesagt, dass die *Eulerschen Formeln*

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

von Anfang an als Grundvoraussetzung gelten, was laienhaft ausgedrückt bedeutet: Alle Sätze/Eigenschaften, die etwa für e^{it} behandelt werden, übertragen sich analog auf die Darstellung über trigonometrische Funktionen.

Definition 1: Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in \mathbb{D}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{D} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f heißt *stetig in* \mathbb{D} , wenn f in jedem Punkt von \mathbb{D} stetig ist.

Bemerkung:

- Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ gibt so, dass alle Einschränkungen $f|_{[t_{k-1}; t_k]}$ stetig sind. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass f endlich viele Unstetigkeitsstellen hat.
- Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf \mathbb{D} , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ gilt für alle Punktepaare $x, x' \in \mathbb{D}$ mit einem Abstand $|x - x'| < \delta$. Die *gleichmäßige Stetigkeit* sagt aus, dass ϵ und δ von x und x' unabhängig sind.

Definition 2: Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Intervall I heißt *differenzierbar* in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser heißt dann *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in x_0 . Man bezeichnet ihn mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$. Die Funktion heißt *differenzierbar im Intervall I* , wenn sie in jedem Punkt des Intervalls differenzierbar ist.

Definition 3: Es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge derart, dass mit $x \in X$ auch $-x$ zu X gehört. Dann heißt eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ *gerade* bzw. *ungerade* wenn $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Folgerung: Jede Funktion $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt genau eine Zerlegung $\phi = g + u$, in der g gerade und u ungerade ist; g heißt *gerader Anteil* von ϕ , u der *ungerade*.

$$g(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) + \phi(-x)] \qquad u(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) - \phi(-x)]$$

Definition 4: Eine reelle Zahl T ist eine *Periode* einer in $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion, wenn gilt:

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{D}_f \Leftrightarrow x + T \in \mathbb{D}_f$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$

Bemerkung: Die Funktion ist periodisch bzw. T -periodisch, wenn sie mindestens eine Periode $T \neq 0$ zulässt. Weiters gilt:

- Ist T eine Periode von f , so ist auch $-T$ eine Periode von f .
- Sind T_1 und T_2 zwei Perioden von f , so ist auch $T_1 + T_2$ eine Periode von f .

Obwohl obige Definitionen bereits grundlegend für die weitere Diskussion sind, soll nachfolgend ein Überblick über (Funktionen-)Reihen und deren Eigenschaften gegeben werden, welche vor allem in der praktischen Handhabung mit Fourierreihen vonnöten sind.

Definition 5: Gegeben sei die Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{C} . Die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ heißt *unendliche Reihe* (Schreibweise: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$). s_n heißt *n -te Partialsumme* (Teilsomme).

Definition 6: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* zur Summe s , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ gilt (Schreibweise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$). Eine nichtkonvergente Reihe heißt *divergent*.

Definition 7: Es seien die Funktionen $a_k(x)$ mit $k \in \mathbb{N}$ auf $X \subseteq \mathbb{C}$ definiert. Dann nennen wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine *Funktionenreihe*.

Definition 8: Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *punktweise konvergent* an $x \in X$, wenn die Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergiert. Die Menge $X_K = \{x \in X \mid \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \text{ ist konvergent}\}$ heißt *Konvergenzmenge* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Funktion A mit $\mathbb{D}_A = X_K$ und $A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ heißt *Summenfunktion* der Funktionenreihe.

Definition 9: Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt auf einer Menge X *gleichmäßig konvergent* zur Summenfunktion A , wenn $A_n(x) \xrightarrow{X} A(x)$. Schreibweise: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \stackrel{X}{=} A(x)$.

Satz 1:

Seien $a_k \in [a; b]$ und \mathbb{R} -integrierbar und es gelte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \stackrel{[a;b]}{=} A(x)$. Dann folgt:

- $A(x)$ ist ebenso \mathbb{R} -integrierbar.
- $\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b a_k(x) dx$

Bemerkung: Bei *gleichmäßiger Konvergenz* darf also *gliedweise* integriert werden; genauso kann gezeigt werden, dass eine *gliedweise* Differentiation möglich ist.

Definition 10: Eine Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf \mathbb{D} heißt *normal konvergent* auf \mathbb{D} , wenn jeder Summand a_k auf \mathbb{D} beschränkt ist und die Reihe der Normen bezüglich \mathbb{D} konvergiert: $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}|_{\mathbb{D}} < \infty$.

Bemerkung: Die *normale* Konvergenz ist ein stärkerer Begriff als die einfache Konvergenz, da für jede in \mathbb{D} normal konvergente Reihe diese dort auch lokal gleichmäßig konvergent ist.

Nun können wir das trigonometrische Polynom als n -te Partialsumme einer speziellen Funktionenreihe wie folgt definieren.

Definition 11: Unter einem *trigonometrischen Polynom* mit Grad $\leq n$ definieren wir

eine mit komplexen Koeffizienten c_k gebildete Funktion

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x}, x \in \mathbb{R},$$

analog dazu versteht man unter *trigonometrischer Reihe* die unendliche Funktionenreihe

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

wobei T die Periode darstellt.

Zur Klärung der Konvergenzeigenschaften der trigonometrischen Reihe benötigen wird noch folgende Definitionen und Sätze. Es ist hierbei wichtig festzuhalten, dass es verschiedene Herangehensweisen zur Erschließung dieser Thematik gibt und auch beinahe jedes Lehrbuch einen anderen Zugang zeigt. Abgesehen davon liegt es auch nicht im Interesse dieser Arbeit, den mathematischen Hintergrund völlig zu beleuchten; es sollen lediglich verwendete mathematische Begriffe und die jeweiligen Sätze, auf denen die Theorie der Fouriertransformationen aufbaut, genannt und erklärt werden. Der folgende Aufbau entspricht i.A. dem Kapitel über die Approximation periodischer Funktionen, wie er im Lehrbuch Analysis I von Königsberger dargestellt wird.

Definition 12: Sei I ein Intervall mit Anfangspunkt a und Endpunkt b . Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion auf I* , wenn sie:

- in jedem Punkt $x \in (a; b)$ sowohl einen linksseitigen als auch einen rechtsseitigen Grenzwert hat,
- im Fall $a \in I$ in a einen rechtsseitigen Grenzwert und im Fall $b \in I$ in b einen linksseitigen.

Bemerkung:

- Mit dem *linksseitigen* Grenzwert $f(x-)$ und dem *rechtsseitigen* $f(x+)$ definiert man als *linksseitige* bzw. *rechtsseitige* Ableitung in x im Fall der Existenz den Grenzwert

$$\lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x+)}{t - x}$$

- Den \mathbb{C} -Vektorraum aller Regelfunktionen auf I bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(I)$.
- Jede Regelfunktion ist stückweise stetig.

Satz 2 (von Fejér):

Für jede T -periodische Regelfunktion f , deren Fourierreihe (siehe dazu Gl.1) mit $S_k = \sum_{r=-k}^k c_r e^{ir\omega x}$ gegeben ist, gilt:

- An jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x)$ gegen $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$. An jeder Stelle x , an der f stetig ist, konvergiert $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x)$ gegen $f(x)$.
- Ist f stetig, so konvergiert $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x)$ gleichmäßig auf \mathbb{R} gegen f .

Bemerkung: Der Satz von Fejér macht direkt keine Aussagen über die Konvergenz der später definierten *Fourierreihe*, er sagt bloß aus, dass die arithmetischen Mittel der Partialsummen einer trigonometrischen Reihe (also einer *Fourierreihe*, wie noch zu definieren ist) gleichmäßig gegen die Funktion konvergieren. Aufgrund dieses Satzes lassen sich aber einige elementare Eigenschaften (etwa die Eindeutigkeit einer *Fourierreihe*) sowie der *Satz von Dirichlet* ableiten.

Für die direkte Anwendung auf *Fourierreihen* dienen folgende Sätze.

Satz 3 (von Dirichlet):

Die Funktion f sei eine T -periodische Regelfunktion und besitze im Punkt x sowohl eine linksseitige als auch eine rechtsseitige Ableitung. Dann konvergiert ihre *Fourierreihe* (zur Definition siehe Gl.1) in x gegen das arithmetische Mittel des linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes von f in x . Steht S_k für die *Fourierreihe* der Funktion f , so gilt in dem Fall:

$$S_{k \rightarrow \infty} = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

Ist f in x stetig, so gilt $S_{k \rightarrow \infty} = f(x)$.

Der Dirichletsche Satz ist bereits ein sehr brauchbares Werkzeug in der Handhabung mit *Fourierreihen*; der Vollständigkeit halber soll an dieser Stelle auch das endgültige Resultat der Überlegungen, unter welchen Voraussetzungen eine *Fourierreihe* konvergiert, genannt werden (wobei es von diesem mittlerweile auch Verallgemeinerungen gibt, die hier nicht erwähnt werden).

Satz 4 (von Carleson):

Die *Fourierreihe* S_k jeder stetigen T -periodischen Funktion f konvergiert *fast überall* gegen f .

Fast überall bedeutet hier: Es gibt eine Ausnahmemenge A vom *Lebesgue-Maß* 0 so, dass $S_{k \rightarrow \infty} = f(x)$ für alle $x \notin A$ gilt.

Bemerkung: Man sagt, $A \subset \mathbb{R}$ habe das *Lebesgue-Maß* 0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ abzählbar viele Intervalle I_1, I_2, I_3, \dots gibt mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$.

Neben dem Satz von Dirichlet und dem von Carleson lassen sich aber auch weiterreichende Aussagen über *stückweise stetige* Funktionen treffen.

Satz 5:

Die Fourierreihe einer *fast überall stetig differenzierbaren* T -periodischen Funktion f , mit $f \in \mathfrak{R}$, konvergiert normal auf \mathbb{R} gegen f .

Satz 6:

Die Fourierreihe einer *stückweise stetig differenzierbaren* T -periodischen Funktion $f \in \mathfrak{R}$ konvergiert auf jedem Intervall $[a; b]$, das keine Unstetigkeitsstelle von f enthält, gleichmäßig gegen f .

Mit den hier behandelten Sätzen ist nun klar welche Bedingungen Funktionen erfüllen müssen, um durch Fourierreihen dargestellt werden zu können. Nicht abgedeckt ist aber die Diskussion, wie es sich mit der Konvergenz einer Fourierreihe an der Umgebung einer Sprungstelle verhält. Es sei hierzu an das Kapitel über das Gibbsche Phänomen verwiesen, welches sich mit dieser Frage beschäftigt.

3.2. Fourierreihen

3.2.1. Definition der Fourierreihe

Die *Fourierreihe* einer T -periodischen Regelfunktion f wird wie folgt definiert:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad \text{mit } \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (1)$$

Aus den mathematischen Grundlagen ist bekannt, unter welchen Voraussetzungen die obige Reihe tatsächlich die Funktion $f(t)$ darstellt; die C_k heißen *Fourierkoeffizienten* und werden so bestimmt, dass die unendliche Reihe in (1) tatsächlich die Funktion $f(t)$ darstellt.

Die Entwicklung einer (beliebigen) T -periodischen Funktion in eine *Fourierreihe* nennt man *Fourieranalyse* bzw. *Fourierentwicklung* (oft auch *harmonische Analyse*). Wie leicht zu zeigen ist, entspricht diese Darstellung nämlich einer - oftmals auch unendlichen - Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Funktionen (daher *harmonisch*) geeigneter Amplitude und Frequenz ω_k :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (C_k e^{i\omega_k t} + C_{-k} e^{-i\omega_k t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[C_k (\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t)) + \right. \\ &\quad \left. + C_{-k} (\cos(\omega_k t) - i \sin(\omega_k t)) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(C_k + C_{-k}) \cos(\omega_k t) + i (C_k - C_{-k}) \sin(\omega_k t) \right] \end{aligned}$$

Definiert man nun neue Fourierkoeffizienten mit $A_k = C_k + C_{-k}$ und $B_k = i(C_k - C_{-k})$, gelangt man zur Darstellung der Fourierreihe als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right] \quad (2)$$

Umgekehrt können die C_k bzw. C_{-k} folgendermaßen aus den A_k und B_k bestimmt werden:

$$C_0 = A_0 \qquad C_k = \frac{A_k - iB_k}{2} \qquad C_{-k} = \frac{A_k + iB_k}{2} \quad (3)$$

Die *trigonometrische Form* der Fourierreihe in (2) wird am häufigsten verwendet, nicht nur weil sie historisch gesehen zuerst hergeleitet werden konnte, sondern auch deswegen,

weil sie - wie in den *mathematischen Grundlagen* besprochen - die Darstellung einer Funktion mittels eines *geraden* (Kosinus-) und eines *ungeraden* (Sinus-)Anteils überschaubar zeigt. Wie später gezeigt wird, bietet diese Darstellung vor allem dann Vorteile wenn man es mit einer *geraden* bzw. *ungeraden* Funktion zu tun hat, da dann der andere Anteil einfach wegfällt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird aber bewusst stets die komplexe Schreibweise aus (1) verwendet, da aus ihr einerseits die Analogien zur später definierten *Fouriertransformation* besser ersichtlich sind und andererseits diese viele rechentechnische Vorteile mit sich bringt.

Nun soll im speziellen Fall einer reellwertigen Funktion $f(t)$ noch eine dritte Schreibweise, nämlich die *Spektraldarstellung* der Fourierreihe näher gezeigt werden, die sich vor allem in jenen Fällen als nützlich erweist, wenn man Verschiebungen einer bekannten Funktion und deren Fourierreihe auf der Abszisse betrachtet. Ausgangspunkt ist die *trigonometrische Form* der *Fourierreihe* in (2), die wie folgt umgeformt werden kann:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k \left[\frac{A_k}{\hat{A}_k} \cos(\omega_k t) + \frac{B_k}{\hat{A}_k} \sin(\omega_k t) \right]$$

Setzt man nun $\sin(\varphi_k) := \frac{A_k}{\hat{A}_k}$ und $\cos(\varphi_k) := \frac{B_k}{\hat{A}_k}$ folgt nun:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k \left[\sin(\varphi_k) \cos(\omega_k t) + \cos(\varphi_k) \sin(\omega_k t) \right]$$

Beachtet man noch das Additionstheorem des Sinus mit

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

folgt daraus die *Spektraldarstellung* der *Fourierreihe* mit:

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)} \quad (4)$$

Wie leicht bestimmt wird, ergeben sich nach Anwendung des trigonometrischen Pythagoras folgende Beziehungen für A_k und φ_k :

$$\hat{A}_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_k = \arctan \frac{A_k}{B_k}$$

Für komplexwertige Funktionen existiert zwar eine *Spektraldarstellung* in analoger Weise, man muss jedoch den Real- und Imaginärteil getrennt betrachten.

3.2.2. Berechnung der Fourierkoeffizienten

Wie aus den drei Darstellungen der Fourierreihe leicht zu erkennen ist handelt es sich bei den ω_k um fest vorgegebene Werte, die lediglich die Frequenzen der einzelnen Terme

variieren; daher besteht die eigentliche mathematische Arbeit bei der Fourieranalyse aus der Berechnung der Fourierkoeffizienten, die nach den Gl.1-4 frei wählbar sind.

Um dennoch eine Rechenvorschrift für diese zu finden, bedient man sich der *Orthogonalitätsrelation* bei trigonometrischen Funktionen. Hierzu multipliziert man Gl.1 mit $e^{-i\omega_l t}$ und bildet anschließend ein Integral über eine volle Periode T :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} \cdot e^{-i\frac{2\pi l}{T}t} \quad (5)$$

$$f(t)e^{-i\frac{2\pi l}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2\pi}{T}(k-l)t} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dots dt \quad (6)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\frac{2\pi l}{T}t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C_k e^{i\frac{2\pi}{T}(k-l)t} dt \right] \quad (7)$$

(i): Für den Fall, dass $k = l$, ergibt sich für den Klammerausdruck die triviale Lösung

$$C_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi}{T} \overbrace{(k-l)}^{=0} t} dt = C_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = C_k T.$$

(ii): Für den Fall, dass $k \neq l$, folgt für das Integral

$$C_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi}{T}(k-l)t} dt = \frac{T}{2\pi i(k-l)} C_k \left[\underbrace{e^{i\pi(k-l)} - e^{-i\pi(k-l)}}_{=0 \vee k, l \in \mathbb{N}} \right] = 0,$$

woraus erkennbar ist, dass alle Terme bis auf $k = l$ aus der Summe (7) identisch Null sind, woraus sich sofort die komplexen Fourierkoeffizienten ergeben mit:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \text{für } -\infty \leq k \leq \infty \quad (8)$$

Auf den ersten Blick ist möglicherweise nicht ersichtlich, wieso in Gl.7 das Integral und die unendliche Reihe vertauscht werden können; vergleicht man aber die Eigenschaften einer Fourierreihe bzgl. *gleichmäßiger Konvergenz* mit dem entsprechenden Satz über allgemeine Funktionenreihen, so ist der Schritt sofort einleuchtend (siehe *mathematische Grundlagen*). Weiters lassen sich mit Hilfe der Beziehungen in (3) auch die Berechnungsvorschriften für Fourierkoeffizienten mit Kosinus- und Sinustermen einfach herleiten. Wir unterscheiden drei Fälle

(i):

$$A_k = C_k - C_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (e^{-i\omega_k t} + e^{i\omega_k t}) dt = \boxed{\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\omega_k t) dt \quad \text{für } k \neq 0} \quad (9)$$

(ii): Analog dazu folgt für B_k

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\omega_k t) dt \quad \text{für alle } k \quad (10)$$

(iii): Für A_0 ergibt sich in analoger Weise

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (11)$$

Nachdem nun bekannt ist, wie die Fourierkoeffizienten berechnet werden, soll die Fourierentwicklung an zwei konkreten Beispielen, einer 'Rechteck'- und einer 'Dreieckfunktion', gezeigt werden.

Beispiel 1: 'Rechteckfunktion'. Der Einfachheit halber betrachten wir eine 2π -periodische Rechteckfunktion Funktion f , wie sie in Abb.1 gezeigt ist.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \in [-\pi; 0], \\ +1 & \text{für } t \in [0; +\pi]. \end{cases}$$

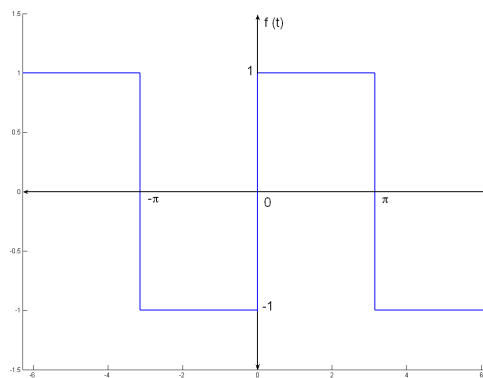


Abbildung 1: Rechteckfunktion aus Beispiel 1

Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten benutzen wir Gl.8 wie folgt:

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1)e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} (+1)e^{-ikt} dt \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{i}{k} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{i}{k} e^{-ikt} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{i}{2\pi k} (1 - e^{ik\pi} - e^{-ik\pi} + 1) = \\
 &= \frac{i}{2\pi k} (2 - e^{ik\pi} - e^{-ik\pi})
 \end{aligned}$$

Somit sind die Fourierkoeffizienten der Rechteckfunktion gefunden; um zur Reihendarstellung der Funktion f zu gelangen werden diese in Gl.1 eingesetzt. Interessant ist noch die Betrachtung der reellen Fourierkoeffizienten A_k und B_k , die nach den Beziehungen in (3) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 A_k &= C_k - C_{-k} = \frac{2i}{2\pi k} - \frac{i}{2\pi k} e^{ik\pi} - \frac{i}{2\pi k} e^{-ik\pi} - \frac{2i}{2\pi k} + \frac{i}{2\pi k} e^{-ik\pi} + \frac{i}{2\pi k} e^{ik\pi} = 0 \\
 B_k &= i(C_k - C_{-k}) = -2i \left(-\frac{i}{2\pi k} \right) - i \frac{i}{2\pi k} e^{-ik\pi} - i \frac{i}{2\pi k} e^{ik\pi} + 2i \frac{i}{2\pi k} \\
 &\quad - i \frac{i}{2\pi k} e^{ik\pi} - i \frac{i}{2\pi k} e^{-ik\pi} = \frac{1}{2\pi k} (4 + 2e^{ik\pi} + 2e^{-ik\pi}) = \frac{4}{2\pi k} (1 + \cos(\pi k)) \\
 &= \frac{2}{\pi k} (1 + (-1)^k)
 \end{aligned}$$

Nachdem alle $A_k = 0$ sind, fällt in der endgültigen Fourierreihe der *gerade Anteil* völlig weg, was auch aus der Angabe hervorgeht, da ja f eine *ungerade* Funktion ist. Somit hätte man also von Anfang an die Fourierkoeffizienten nur unter Verwendung von Gl. 10 berechnen können.

Für die Fourierreihe gilt daher:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left(2 \sin(2t) + \sin(4t) + \frac{2}{3} \sin(6t) \dots \right) \quad (12)$$

Eine Abbildung der einzelnen Partialsummen der Fourierreihe findet sich in Kap.3.2.5, wo dieses Beispiel unter einem anderen Aspekt noch einmal aufgegriffen wird.

Beispiel 2: 'Dreieckfunktion'. Nun betrachten wir ein anderes Beispiel (wiederum mit der Periode $T = 2\pi$) und nützen gleich von Anfang an die Kenntnis, dass es sich um eine *gerade* Funktion handelt

$$g(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{\pi} & \text{für } t \in [-\pi; 0], \\ 1 - \frac{t}{\pi} & \text{für } t \in [0; +\pi]. \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten lauten gemäß Gl.9:

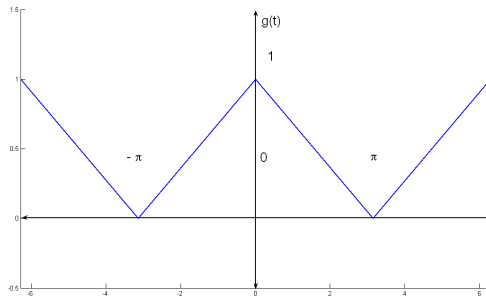


Abbildung 2: Dreieckfunktion aus Beispiel 2

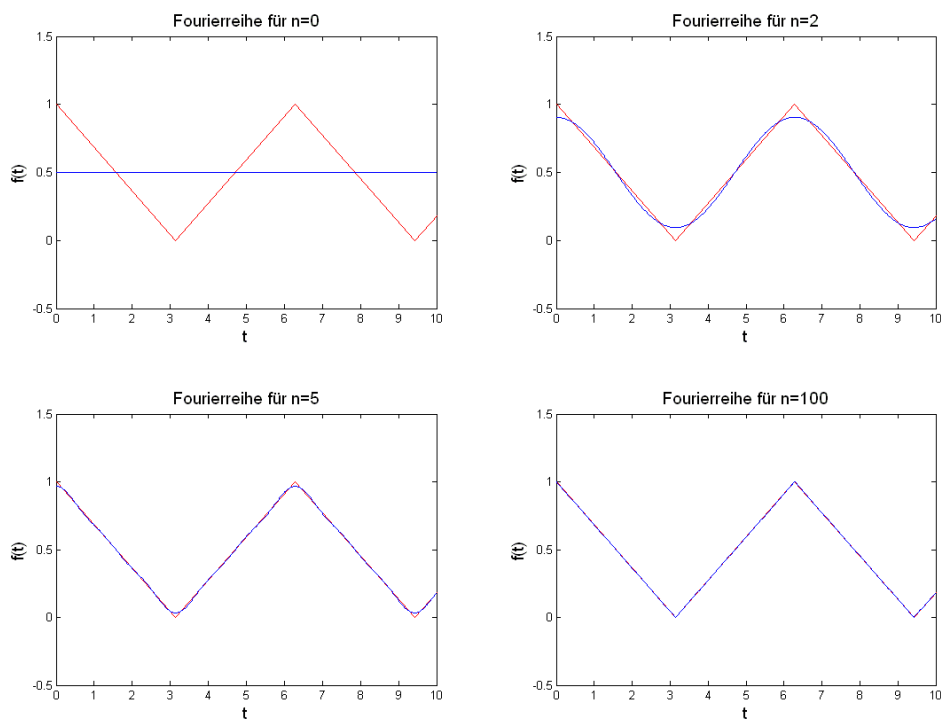


Abbildung 3: Vier Entwicklungen der Dreiecksfunktion für verschiedene (n -te) Partialsummen der Fourierreihe aus Beispiel 2.

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \left(1 + \frac{t}{\pi}\right) \cos(kt) dt + \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) \cos(kt) dt \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^0 \cos(kt) dt + \int_0^{\pi} \cos(kt) dt}_{=0} \right] + \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^0 t \cos(kt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt \right] = \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt = -\frac{2}{\pi^2 k^2} [kt \sin(kt) + \cos(kt)] \Big|_0^{\pi} = \frac{2 [1 - (-1)^k]}{\pi^2 k^2}
 \end{aligned}$$

Weiters folgt mit Gl.11 für A_0 :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \left(1 + \frac{t}{\pi}\right) dt + \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) dt \right] = \frac{1}{2}$$

Somit ergibt sich für die Fourierreihe

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(t) + \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{25} \cos(5t) \dots \right) \quad (13)$$

In Abb.3 sind einige *Entwicklungen* bzw. Näherungen der Funktion $g(t)$ durch ihre Fourierreihe sichtbar.

3.2.3. Bedeutung der Fourierkoeffizienten

Bevor die Eigenschaften der Fourierreihe genauer analysiert werden, soll an dieser Stelle kurz die Bedeutung der Fourierkoeffizienten näher veranschaulicht werden.

Durch die Fourieranalyse werden beliebige periodische Funktionen als (unendliche) Summen von *trigonometrischen Funktionen* bzw. Sinus- und Kosinustermen dargestellt. Die Größe der Fourierkoeffizienten gibt dabei an, wie stark eine gewisse Frequenz ω_k zum 'Tragen' kommt; also wie stark deren 'Gewichtung' ist. Trägt man also die Fourierkoeffizienten in einem Diagramm gegen die Laufvariable k auf, lässt sich erkennen, aus welchen Frequenzen eine beliebige periodische Funktion besteht; also deren spektraler Aufbau abbilden.

Daraus ergeben sich eine Menge technischer und physikalischer Anwendungsmöglichkeiten, von denen einige noch im Verlauf dieser Arbeit angesprochen werden.

Ein anderer Zugang, der vor allem bei der später behandelten Fouriertransformation von Bedeutung ist und sich ebenfalls in vielen Lehrbüchern widerspiegelt, rührt von folgender Überlegung:

Die Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourierreihe kann man auch so erklären, dass eine Funktion $f(t)$, deren Größe an einem bestimmten *Ort* bzw. bei einer bestimmten *Zeit* (was mathematisch gesehen keinen Unterschied macht) bekannt ist, in einen Raum abgebildet wird, in dem jeder *Frequenz* eine bestimmte Größe zugeordnet ist, also von der Form:

$$\boxed{f(t) \longmapsto \{C_k; \omega_k\}} \quad (14)$$

Das bedeutet letztenendes, dass eine *Fouriertransformation* (=Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Kreisfrequenz ω_k bzw. der Laufvariablen k und der Fourierkoeffizienten) eine Transformation aus dem Zeitraum in den Frequenzraum darstellt. Dies ist mathematisch gleichbedeutend mit einer Abbildung aus dem *Ortsraum* in den *Impulsraum*, wie sie in der Quantenmechanik verwendet wird.

Es macht nämlich keinen Unterschied ob man die Koeffizienten C_k in Abhängigkeit vom Laufindex k oder der Kreisfrequenz ω_k bzw. der Frequenz ν_k darstellt, da diese Größen alle miteinander verknüpft sind und man die jeweilige Größe lediglich mit einer bestimmten Konstante multiplizieren muss, um zur anderen zu gelangen:

$$k \rightarrow \nu_k = k \cdot \frac{1}{T} \qquad k \rightarrow \omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T} \qquad \nu_k \rightarrow \omega_k = \nu_k \cdot 2\pi$$

Daher betrachten wir bei unseren späteren Überlegungen alle drei Begriffe als gleichwertig.

In Abb.4 bilden wir nun die Fourierkoeffizienten aus den Beispielen 1 und 2 in Abhängigkeit von der Laufvariablen k ab.

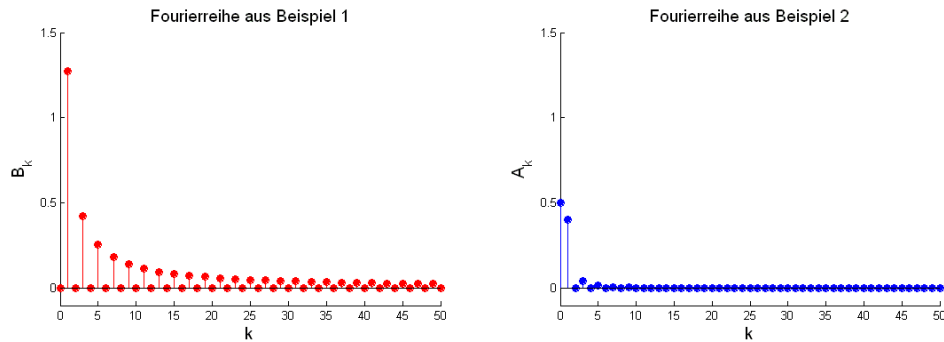


Abbildung 4: Darstellung der Fourierkoeffizienten B_k und A_k aus den zwei behandelten Beispielen zur Fourieranalyse. Erkennbar ist die viel bessere Konvergenz der A_k (Dreieckfunktion), was auch aus Abb.3 hervorgeht.

3.2.4. Eigenschaften der Fourieranalyse

Obwohl die wichtigsten Eigenschaften zur Fourierentwicklung bereits aus den behandelten Sätzen und Definitionen hervorgehen, sollen nachfolgend einige spezielle Eigenschaften, die sich später analog auf die kontinuierliche Fouriertransformation in Kap.3.3 übertragen lassen, sowie einige allgemeine Überlegungen, die für das Gesamtverständnis zur Theorie der Fouriertransformationen maßgeblich sind, beschrieben werden.

Ausgangspunkt ist wieder die komplexe Schreibweise der Fourierkoeffizienten aus Gl.8 und betrachtet werden die beiden T -periodischen Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &\longmapsto \{C_k; \omega_k\} \\ g(t) &\longmapsto \{C'_k; \omega_k\} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich sofort der Satz über die Linearität, der trivial hergeleitet werden kann.

Linearitätstheorem:

$$\boxed{h(t) = af(t) + bg(t) \Leftrightarrow \{aC_k + bC'_k; \omega_k\}} \quad (15)$$

Weitere sind:

Verschiebungssatz:

$$\boxed{f(t-a) \mapsto \{C_k e^{-i\omega_k a}; \omega_k\}} \quad (16)$$

Beweis:

$$C'_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-a) e^{-i\omega_k t} dt \quad \text{Substitution: } \begin{matrix} t'=t-a \\ dt'=dt \end{matrix}$$

$$C'_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-a}^{\frac{T}{2}-a} f(t') e^{-i\omega_k(t'+a)} dt' = e^{i\omega_k a} C_k$$

Verschiebungssatz im Fourierraum:

$$\boxed{f(t) e^{i\frac{2\pi a}{T} t} \mapsto \{C_{k-a}; \omega_k\}} \quad (17)$$

Beweis:

$$C'_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i\frac{2\pi a}{T} t} e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}(k-a)t} dt = C_{k-a}$$

Skalierungssatz:

$$\boxed{f(at) \mapsto \left\{ C_k; \frac{\omega_k}{a} \right\}} \quad (18)$$

Beweis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(at) e^{-i\omega_k t} dt \quad \text{Substitution: } \begin{matrix} t'=at \\ dt'=adt \end{matrix}$$

$$C_k = \frac{a}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t') e^{-i\omega_k \frac{t'}{a}} dt' \frac{1}{a} = C'_k$$

Die obigen Sätze bringen vor allem rechentechnische Erleichterungen; was aber die praktische Anwendung selbst angeht, können verallgemeinert folgende drei Aussagen getroffen werden:

(i): Für *stetige Funktionen* ist eine Fourierreihe gleichmäßig konvergent. Im Falle von Unstetigkeiten in der ersten Ableitung ergeben sich unendlich viele Glieder der Fourierreihe.

(ii): Für *glatte Funktionen*, also für jene, die unendlich oft differenzierbar und deren sämtliche Ableitungen notwendigerweise stetig sind, enthält die Fourierreihe endlich viele Glieder.

(iii): Für Funktionen mit Unstetigkeiten im Funktionswert (Sprungstellen) gelten die entsprechenden Sätze; zusätzlich tritt aber noch das im Kap.3.2.5 behandelte Gibbsche Phänomen auf.

Wir wollen nun noch einen wichtigen Aspekt der *Fourieranalyse* betrachten, nämlich die Frage (die sich auch F.W. Bessel stellte) nach der *besten* Approximation durch *trigonometrische Polynome*. Diese ist direkt mit der - vor allem für die numerische Auswertung wichtigen - Fehlerberechnung verbunden, denn im Normalfall wird man die Auswertung einer Fourierreihe nach dem n -ten Glied abbrechen und wissen wollen, wie groß die Abweichung von der tatsächlichen Funktion ist.

Ohne genau auf die mathematische Herleitung einzugehen kann gesagt werden, dass die Fourierkoeffizienten tatsächlich eine Minimaleigenschaft aufweisen, was bedeutet, dass durch sie die Funktion tatsächlich *am besten* approximiert wird.¹

Weiters ergibt sich nach etwas längerer Rechnung für den quadratischen Fehler Δ_n :

$$\Delta_n = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |C_k|^2 \quad (19)$$

In analoger Weise folgt die *Besselsche Ungleichung*:

$$\sum_{k=-n}^n |C_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt \quad (20)$$

Für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ergibt sich die *Parsevalsche Gleichung*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt \quad (21)$$

Die Letztgenannte tritt bei der *Fouriertransformation* in ähnlicher Form häufig als *Satz von Plancherel* auf.

3.2.5. Gibbsches Phänomen

Dieses Phänomen hängt mit den Sprungstellen einer Funktion zusammen. Einerseits sagt der Satz von Dirichlet (siehe Seite 10), dass an der Sprungstelle die Fourierreihe gegen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes konvergiert, andererseits ist nicht sofort ersichtlich welches Verhalten die Fourierreihe in der Umgebung dieser Sprungstelle zeigt. Das von H. Wilbraham und J.W. Gibbs unabhängig beobachtete Phänomen besagt, dass sich in dieser Umgebung sog. *Über-* und *Unterschwinger* herausbilden, deren Höhe von n (=Anzahl der Glieder der Partialsumme einer Fourierreihe) unabhängig ist; d.h. auch

¹Für die genaue mathematische Herleitung siehe Ref. [1], S.334ff.

beim Übergang $n \rightarrow \infty$ verschwinden diese nicht.

Um das zu illustrieren, ziehen wir Beispiel 1 aus Kap.3.2.2 heran und betrachten zunächst Entwicklungen für verschiedene n :

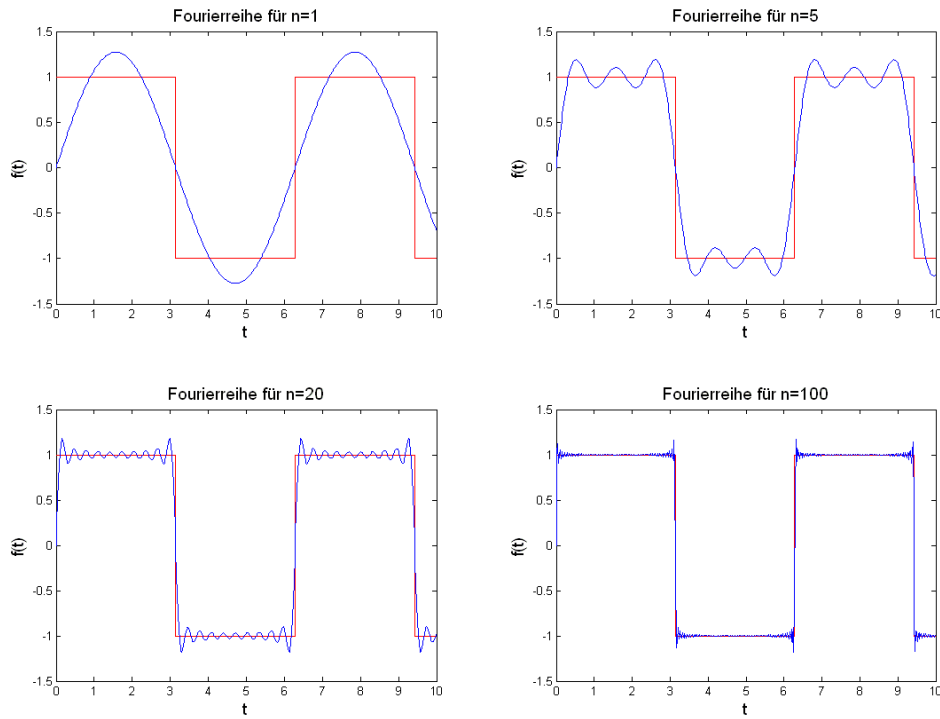


Abbildung 5: Rechteckfunktion aus Beispiel 1 mit sog. *Gibbschen Über- und Unterschwingern* bei Sprungstellen

Da im Rahmen dieser Arbeit eine mathematische Darstellung des Gibbschen Phänomens mit allen Details (siehe Ref. [1]) zu umfangreich wäre, folgt hier nur eine kurze Zusammenfassung:

Ausgangspunkt der Rechnung ist die zur Fourierreihe für $f(t)$ in (2) gehörende n -te Partialsumme

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)],$$

wobei $f(t)$ eine Funktion mit der Periode T sei. Es kann nun nach einer Reihe von Rechenschritten gezeigt werden, dass diese Partialsumme als Faltungsintegral (zur Faltung siehe Kap.3.3.3) der Funktion $f(t - \frac{T}{2\pi}u)$ mit dem sog. *Dirichletschen Integralkern* dargestellt werden kann:

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(t - \frac{T}{2\pi}u\right) \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du.$$

Wendet man nun diese Gleichung auf eine Funktion $f(t)$ mit Unstetigkeitsstelle an, kann man die Position und den entsprechenden Funktionswert des sog. 'ersten Überschingers' in Abhängigkeit von n berechnen; für eine einfache Testfunktion wie die Rechteckfunktion können diese Rechnungen sogar ('fast ohne Näherung') analytisch durchgeführt werden. Das konkrete Ergebnis lautet: Für die Position t_1 des 'ersten Überschingers' (rechts neben der Sprungstelle) bei $t = 0$, s. Abb.5 ergibt sich

$$t_1 \propto \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_1(n) = 0,$$

und der entsprechende Funktionswert der Fourierkurve konvergiert zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t_1) \approx 1.179$$

d.h., die Abweichung von der gesamten Sprunghöhe beträgt mindestens 8.9 %, egal wieviele Fourierterme man in die Summation einbezieht.

3.3. Fouriertransformation (FT)

In Kap.3.2.3 wurde der Begriff der *Fouriertransformation* bereits kurz angesprochen. Gerade bei der Fourieranalyse konnte gezeigt werden, dass jede beliebige periodische Funktion prinzipiell als (unendliche) Summe *trigonometrischer Polynome* dargestellt werden kann. Der Übergang von der *Fourieranalyse* zur *Fouriertransformation* geschieht genau mit dem Gedanken, das bisher behandelte Konzept auf aperiodische Funktionen zu übertragen.

3.3.1. Herleitung und Definition

Zur Herleitung der Definitionsgleichung betrachten wir die Fourierreihe in komplexer Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad \text{mit } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, \quad \text{ sowie } C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Formen wir den Ausdruck für die komplexen Fourierkoeffizienten um mit

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad \text{ und } \quad \omega_k = \Delta\omega k,$$

erhalten wir eine neue Darstellung der C_k , in der wir eine neue Funktion $F(\Delta\omega k)$ definieren können:

$$C_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i\Delta\omega k t} dt}_{=: F(\Delta\omega k)}.$$

Diese fügen wir nun in die Definitionsgleichung der Fourieranalyse ein und erhalten

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} F(\Delta\omega k) \right) e^{i\Delta\omega k t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Delta\omega k) e^{i\Delta\omega k t} \Delta\omega.$$

Nun haben wir einen etwas veränderten Ausdruck für die Darstellung einer periodischen Funktion durch eine Fourierreihe stehen; dieser lässt sich sehr einfach auf eine aperiodische Funktion übertragen. Denn lässt man die Periode $T \rightarrow \infty$ laufen, sodass diese Periode den gesamten (i.A. unendlichen) Definitionsbereich der zu darstellenden Funktion abdeckt, ist dies schon erreicht.

Durch den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ folgt $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, woraus ersichtlich wird, dass ω nun kontinuierliche Werte annimmt. Der obige Ausdruck kann bei so einem Übergang als *Riemannsche Summe* identifiziert werden und so ergibt sich:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (22)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (23)$$

In vielen Lehrbüchern finden sich diese Definitionsgleichungen zur Fourier(-Hin-) (Gl.23) und Rück-Transformation (Gl.22); wir benützen allerdings die ebenso häufig verwendete *symmetrische* Form und definieren die *Fouriertransformation* mit:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt} \quad (24)$$

Die Funktion $F(\omega)$ heißt *Fouriertransformierte*. Für die Funktion f muss dabei gelten:

- $f(x)$ sei auf \mathbb{R} definiert, reell- bzw. komplexwertig und dort *stückweise stetig*.
- $f(x)$ ist auf \mathbb{R} *absolut integrierbar*, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Während die erste Forderung an die Funktion f bereits aus der *Fourieranalyse* bekannt ist und sich deswegen auch auf die *Fouriertransformation* überträgt, ist die zweite Forderung nicht sofort ersichtlich. Sie stellt nämlich eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Integrals in (24) dar und gewährleistet, dass die Fouriertransformierte F nicht über alle Schranken wächst.²

Analog dazu wird die *Rücktransformation* wie folgt definiert:

$$\boxed{\mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega} \quad (25)$$

Die physikalische Bedeutung der *Fouriertransformation* ist im Grunde gleich wie in Kap.3.2.3 erklärt, mit dem Unterschied, dass sie bei aperiodischen Funktionen angewandt wird und somit eigentlich die meisten funktionalen Zusammenhänge fouriertransformiert werden können. Bevor einige Eigenschaften der (kontinuierlichen) *Fouriertransformation* behandelt werden, sollen einige Beispiele präsentiert werden.

Beispiel 3: 'Rechteckimpuls'. Wir betrachten nun einen 'Rechteckimpuls', der im Bereich $t \in [-L; +L]$ definiert ist. Für die Abbildung nehmen wir $L = 2$ an.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-L; +L], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

²Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich in der mathematischen Literatur auch andere (gleichwertige) Formulierungen dieser Bedingungen finden, die in erster Linie über das *Lebesgue-Maß* geführt werden; für unsere Überlegungen ist es aber nicht notwendig, auf diese einzugehen.

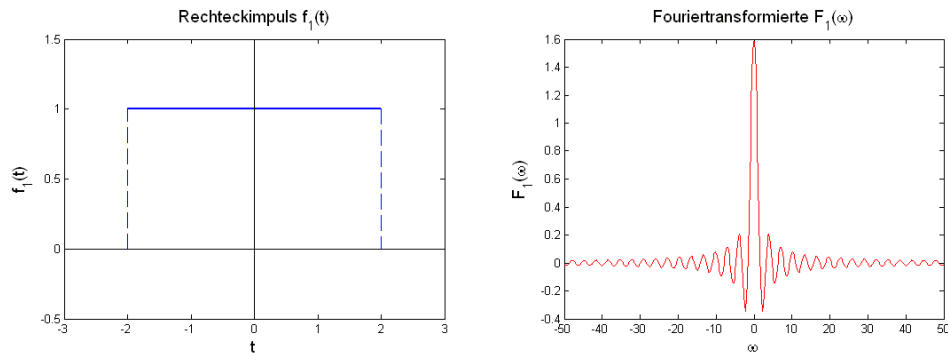


Abbildung 6: 'Rechteckimpuls' $f_1(t)$ aus Beispiel 3 (links) mit Fouriertransformierter $F_1(\omega)$ (rechts).

Die Fouriertransformierte F_1 wird mit Hilfe der Gl.24 bestimmt, wobei die Grenzen entsprechend der Funktion geändert werden:

$$\begin{aligned}
 F_1(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-L}^L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\omega L} - e^{-i\omega L}}{i\omega} \right] = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin(\omega L)
 \end{aligned}$$

Beispiel 4: 'Normierte Gaußfunktion'. Gegeben sei eine normierte Gaußfunktion. Für die Abbildung wählen wir für die Standardabweichung $\sigma = 1$ und $\sigma = 4$ um jeweils die Auswirkungen auf die Fouriertransformierte zu zeigen.

$$u(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} \quad (26)$$

Die Fouriertransformierte U wird wiederum mit Gl.24 berechnet:

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\sigma\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2 - i\omega t} dt$$

Der letzte Ausdruck entspricht hierbei dem sog. *Gaußintegral*, dessen Berechnung bereits aus anderen Vorlesungen bekannt sein sollte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Damit folgt für die Fouriertransformierte U :

$$U(\omega) = \frac{1}{2\sigma\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \quad (27)$$

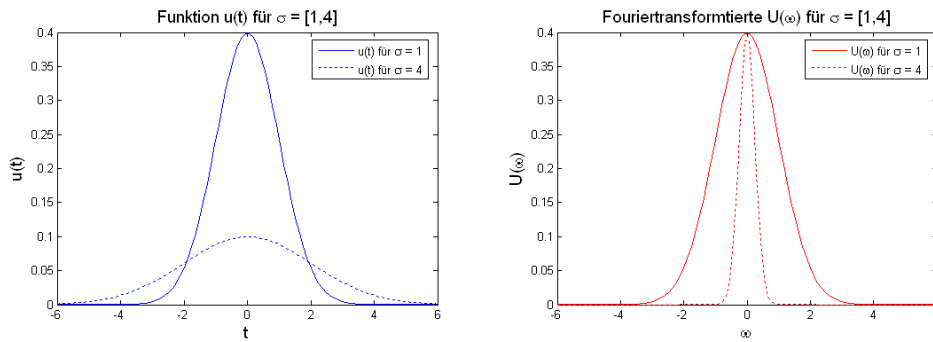


Abbildung 7: Darstellung der Funktion $u(t)$ und ihrer Fouriertransformierten $U(\omega)$ für verschiedene σ .

Aus den Gl.26 und 27 sind einige interessante Beziehungen ableitbar. Zum einen zeigt sich, dass die Fouriertransformierte $U(\omega)$ einer Gaussfunktion $u(t)$ wieder eine Gaussfunktion ist; zum anderen findet man einen einfachen Zusammenhang zwischen den Standardabweichungen der beiden Funktionen. Die Gaussfunktion $u(t)$ hat die Standardabweichung σ , und die entsprechende Fouriertransformierte $U(\omega)$ $\sigma_\omega = \frac{1}{\sigma}$, woraus die einfache Relation

$$\sigma\sigma_\omega = 1$$

folgt. D.h., je schlanker die Funktion im Zeitraum ist, desto breiter ist ihre Fouriertransformierte im Frequenzraum.

Wir setzen an dieser Stelle unsere Überlegungen aus Kap.3.2.3 fort, bei denen wir bereits konstatiert haben, dass eine *Fouriertransformation* ebenso wie ein Übergang aus dem *Zeit-* in den *Frequenzraum* auch als eine Transformation aus dem *Orts-* in den *Impulsraum* aufgefasst werden kann. Bekanntlich ist die Ortsverteilung eines quantenmechanischen Teilchens durch das Absolutquadrat seiner Wellenfunktion gegeben. Ist der Aufenthaltsort des Teilchens gut lokalisiert, was eine schlanke Ortsfunktion bedeutet, so ist die Impuls-Wellenfunktion umso breiter und der Teilchenimpuls kann nur mehr ungenau bestimmt werden. Letztere Aussage spielt u.a. eine herausragende Rolle in der Quantenmechanik im Zusammenhang mit der *Heisenbergschen Unschärferelation*.

Beispiel 5: 'Einseitige Exponentialfunktion'. Wir berechnen nun die Fouriertransformierte einer Exponentialfunktion, die in der Folge gegeben ist. Für die Abbildung wird dabei $\tau = 3$ verwendet.

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

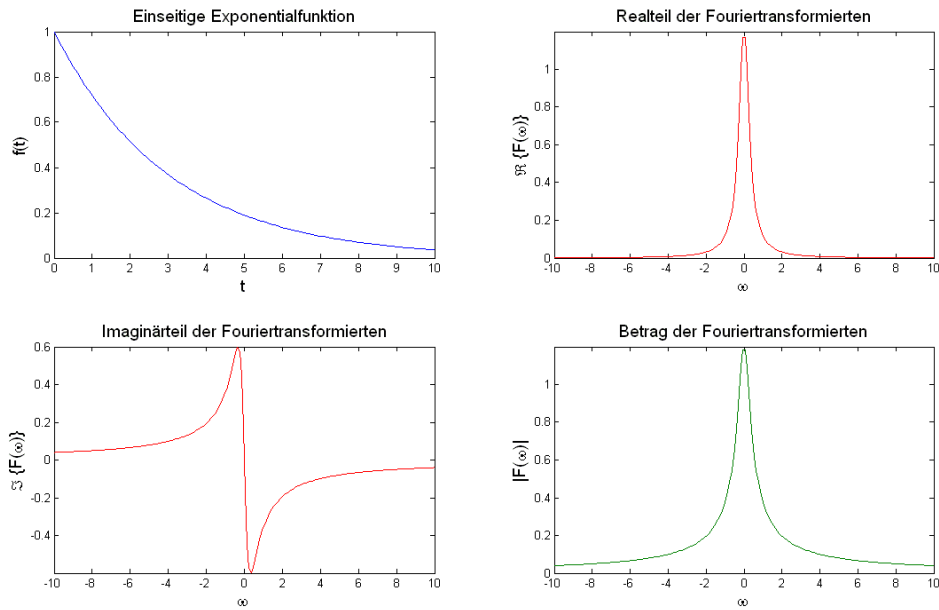


Abbildung 8: Abbildung der Funktion $h(t)$, des Real- und Imaginärteils sowie des Betrags der Fouriertransformierten $H(\omega)$.

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{\tau} + i\omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(\frac{1}{\tau} + i\omega)t}}{-(\frac{1}{\tau} + i\omega)} \right]_0^{\infty} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tau}{1 + i\tau\omega}
 \end{aligned}$$

Wie wir sehen ist die Fouriertransformierte komplex und wir können diese auf einen Real- und Imaginärteil spalten mit

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} - i \frac{\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\tau}{1 + \tau^2\omega^2} - i \frac{\omega\tau^2}{1 + \tau^2\omega^2} \right].$$

Der Umstand, weshalb $H(\omega)$ im Gegensatz zu den anderen Beispielen komplexwertig ist, ergibt sich aus Symmetrien der *Fouriertransformation* die in Tab.1 im nachfolgenden Kapitel zusammengefasst sind.

3.3.2. Eigenschaften

Die Eigenschaften der *Fourieranalyse* übertragen sich in analoger Weise auf die Eigenschaften der Fouriertransformation. Nachstehend eine Auflistung, wobei die Beweise für die ersten vier Sätze analog zu Kap.3.2.4 gezeigt werden:

Linearität:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots\} = c_1 \mathfrak{F}\{f_1\} + c_2 \mathfrak{F}\{f_2\} + \dots} \quad (28)$$

Verschiebungssatz:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{f(t - a)\} = e^{-ia\omega} F(\omega)} \quad (29)$$

Verschiebungssatz im Fourierraum:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{e^{iat} f(t)\} = F(\omega - a)} \quad (30)$$

Skalierungssatz:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)} \quad (31)$$

Differentiationssatz:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{f^{(k)}(t)\} = (i\omega)^k F(\omega)} \quad (32)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f^{(k)}(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^{(k)}(t)}_u \underbrace{e^{-i\omega t}}_{v'} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\omega t} f^{(k-1)} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[e^{-i\omega t} f^{(k-1)} + \dots + (i\omega)^{k-1} e^{-i\omega t} f^0 \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{(i\omega)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(0)}(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= (i\omega)^k F(\omega) \end{aligned}$$

Der erste Term fällt aufgrund der *absoluten Integrierbarkeit* von f weg.

Integralsatz:

$$\boxed{\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\xi) d\xi\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega)} \quad (33)$$

Beweis:

Der Integralsatz folgt aus dem Differentiationssatz, indem wir die neue Funktion $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\xi) d\xi$ definieren:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = \mathfrak{F}\{g'(t)\} = i\omega G(\omega) \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

Satz von Plancherel (Parsevals Theorem):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (34)$$

Weiters kann gesagt werden, dass bei einer genaueren Untersuchung der Eigenschaften der Fouriertransformation eine Menge interessanter Symmetrien und Zusammenhänge auftreten, die an dieser Stelle aufgrund ihres Umfangs nicht alle behandelt werden können. In Tab.1 sind jedoch einige wichtige Symmetrien zusammengefasst.

Eigenschaften der Funktion $f(t)$	Eigenschaften der Fouriertransformierten $F(\omega)$
$f(t)$ reell	$\Re F(\omega)$ gerade und $\Im F(\omega)$ ist ungerade
$f(t)$ imaginär	$\Re F(\omega)$ ungerade und $\Im F(\omega)$ ist gerade
$f(t)$ gerade	$F(\omega)$ gerade
$f(t)$ ungerade	$F(\omega)$ ungerade
$f(t)$ reell und gerade	$F(\omega)$ reell und gerade
$f(t)$ reell und ungerade	$F(\omega)$ imaginär und ungerade
$f(t)$ imaginär und gerade	$F(\omega)$ imaginär und gerade
$f(t)$ imaginär und ungerade	$F(\omega)$ reell und ungerade

Tabelle 1: Zusammenfassung der wichtigsten Symmetrien bei einer Fouriertransformation

3.3.3. Faltung und Entfaltung

Die Faltung wurde bisher schon bei der *Integraldarstellung* von Fourierreihen erwähnt und soll nun in der Folge definiert und mit ihren wichtigsten Eigenschaften näher gebracht werden.

Es seien f und g *Regelfunktionen* auf \mathbb{R} , dann definieren wir die *Faltung* von f und g folgenderweise:

$$\boxed{(f \otimes g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)dx} \quad (35)$$

Eine der beiden Funktionen muss dabei einen *kompakten Träger* haben. Man sagt, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ hat einen kompakten Träger, wenn es ein kompaktes Intervall $[-a; +a]$ gibt, außerhalb dessen f Null ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-a}^a f(t)dt.$$

Wie leicht gezeigt werden kann ist die *Faltung* kommutativ, distributiv und assoziativ und darüber hinaus sehr eng mit der *Fouriertransformation* verwandt. Bevor dies ausführlicher

anhand eines Beispiels gezeigt wird, soll zunächst die eigentliche Bedeutung der *Faltung* erläutert werden.

Wie aus der Definitionsgleichung erkennbar, wird die *Faltung* aus der Gewichtung einer Funktion mit einer anderen gebildet. Physikalisch kann dies als Verzögerung gedeutet werden, wenn wir z.B. eine Funktion f mit einem Gerät aufnehmen, das nicht sofort auf ein Signal anspricht; sei diese Verzögerung nun ebenfalls durch einen funktionellen Zusammenhang (in diesem Fall g) gegeben, so ist das eigentliche Messergebnis die 'Faltung' der beiden Funktionen. Daraus ergeben sich eine Menge physikalischer Anwendungsmöglichkeiten, die in erster Linie mit dem *Entfalten* von Daten zu tun haben. Das bedeutet, man ist nach Analyse der Messapparatur bemüht, deren Einfluss auf das Eingangssignal zu bestimmen und anhand dessen die eigentliche (Eingangs-)Funktion zu rekonstruieren. Zur Illustrierung behandeln wir ein idealisiertes Beispiel.

Beispiel 6: 'Gauß- und Exponentialfunktion'. Wir betrachten nun einen Impuls $h(t)$, der die Form einer fallenden Exponentialfunktion aufweist. Nehmen wir nun an, wir nehmen diesen Impuls mit Hilfe eines Messgerätes auf, das eine gewisse Anstiegs- und Abfallzeit aufweist; diese beschreiben wir idealisiert mit Hilfe einer Gaußfunktion $u(t)$, wie sie bereits in Beispiel 4 behandelt wurde. Seien die Funktionen nun folgendermaßen gegeben:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad u(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

Wir bilden nun das Faltungsintegral mit Hilfe von Gl.35:

$$\begin{aligned} S(t) &= (h \otimes u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)u(t-x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\tau}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{x}{\tau} + \frac{tx}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{2\sigma^2 x}{\tau} - 2tx + x^2\right)\right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x - \left(t - \frac{\sigma^2}{\tau}\right)\right]^2\right\} \exp\left\{-\left(t - \frac{\sigma^2}{\tau}\right)^2\right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} e^{\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\tau^2}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x - \left(t - \frac{\sigma^2}{\tau}\right)\right]^2\right\} dx. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x' = x - \left(t - \frac{\sigma^2}{\tau}\right)$ und $dx' = dx$ erhalten wir bei Berücksichtigung der geänderten Integrationsgrenzen:

$$S(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \int_{-(t-\frac{\sigma^2}{\tau})}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x'^2} dx'.$$

Weiters folgt mit $\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}x'$ und $d\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}dx'$:

$$S(t) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \int_{\frac{\sigma}{\tau\sqrt{2}} - \frac{t}{\sigma\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-\bar{x}^2} d\bar{x} = \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma}{\tau\sqrt{2}} - \frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Der letzte Ausdruck steht hierbei für die *komplementäre Störfunktion*

$$\operatorname{erfc}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

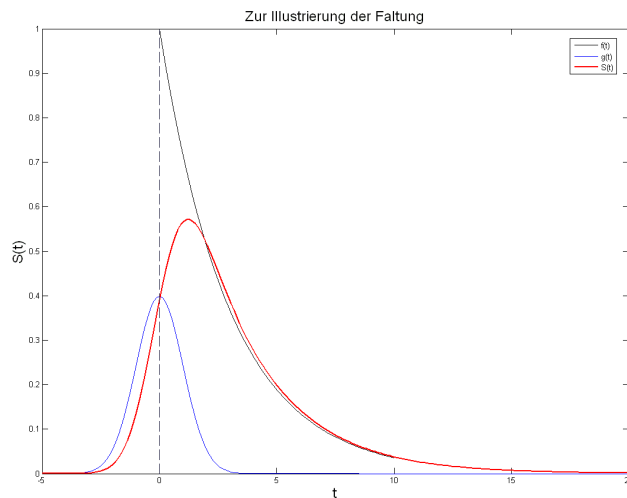


Abbildung 9: Darstellung der Funktionen $h(t)$ und $u(t)$ sowie der Faltung $S(t)$

In Abb.9 sind die beiden gegebenen Funktionen zusammen mit deren Faltung dargestellt.

Wir fassen dieses Beispiel nun etwas allgemeiner zusammen und bringen es mit der Fouriertransformation in Verbindung: In der Realität nimmt man also bei einem beliebigen Messvorgang bereits die Faltung der Funktion des Eingangssignals mit der spezifischen Funktion der Messvorrichtung auf und ist danach bemüht, die eigentliche Eingangsfunktion wiederherzustellen. Wie an diesem Beispiel gezeigt, ist die analytische Auswertung des Faltungsintegrals i.A. recht mühselig. In so einem Fall ist der Faltungssatz bei der *Fouriertransformation* von großer Bedeutung:

$$\boxed{\mathfrak{F}\{f \otimes g\} = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)} \quad (36)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega') e^{i\omega'(t-x)} d\omega' dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G(\omega') e^{i\omega' t} d\omega d\omega' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')x} dx}_{=2\pi\delta(\omega-\omega')} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} d\omega.
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar Gl.36.

Wir hätten unsere Rechnung also wesentlich einfacher gestalten können, indem wir die Fouriertransformierten der einzelnen Funktionen gebildet und dann miteinander ausmultipliziert hätten.

In der Praxis nutzt man die *Fouriertransformation* eigentlich zum sog. *Entfalten*, da man logischerweise die Eingangsfunktion wiederherstellen möchte. Dazu geht man folgendermaßen vor:

Zunächst bildet man die Fouriertransformierten der Apparatfunktion (bei uns $u(t)$) und der 'Faltung' ($S(t)$), danach dividiert man die Fouriertransformierte der Faltung $S(t)$ durch diese Fouriertransformierte (U) der Apparatfunktion und bildet vom Ergebnis die inverse *Fouriertransformation*.

Angewandt auf unserer Beispiel gehen wir also wie folgt vor:

$$S = f \otimes g \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{F}\{f \otimes g\} = \mathfrak{F}\{f\}\mathfrak{F}\{g\} = \mathfrak{F}\{S\}$$

Nun können wir nach f auflösen und erhalten:

$$\mathfrak{F}\{f\} = \frac{\mathfrak{F}\{S\}}{\mathfrak{F}\{g\}} \quad \longrightarrow \quad f = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{F}\{S\}}{\mathfrak{F}\{g\}} \right\}$$

In der Natur lassen sich in der Tat viele Zusammenhänge durch geeignete mathematische Modelle bilden und eventuell analytisch lösen; daher spielt die Faltung/Entfaltung, wie sie an diesem Beispiel demonstriert wurde, eine wichtige Rolle. In den meisten Fällen hat man es aber nicht mit kontinuierlichen Funktionen zu tun, sondern muss diskrete Daten auswerten. Dies funktioniert im Grunde nach demselben Prinzip, wird aber bei der später definierten *diskreten Fouriertransformation* genauer behandelt.

3.3.4. Korrelation

Im Gegensatz zur *Faltung*, bei der - vereinfachend erklärt - der Einfluss einer Funktion auf eine andere überprüft wird, besteht das Grundprinzip der *Korrelation* darin, zu überprüfen wie zwei Funktionen miteinander übereinstimmen (*korrelieren*). Das Korrelationsintegral wird analog zur *Faltung* wie folgt definiert:

$$(f \odot g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g^*(t+x)dx \quad (37)$$

Obwohl die Definitionsgleichung bis auf das Vorzeichen im Argument von g beinahe identisch zu der der *Faltung* ist, existieren doch einige Unterschiede in der mathematischen Behandlung: Die Korrelation ist zwar assoziativ, distributiv aber nicht kommutativ; der Stern $*$ bedeutet konjugiert komplex. Für die Fouriertransformierte der Korrelation zweier Funktionen ergibt sich folgende Beziehung:

$$\mathfrak{F}\{f \odot g\} = \sqrt{2\pi}F^*(\omega)G(\omega) \quad (38)$$

Beweis:

Der Beweis wird äquivalent zum Faltungssatz geführt.

Bei näherer Betrachtung des Korrelationsintegrals ist ersichtlich, dass dieses nicht für alle Funktionen zu existieren braucht. Für uns interessant ist jedoch die Betrachtung wie sich die Korrelation periodischer Funktionen verhält; in solchen Fällen versteht man zwei Funktionen als *unkorreliert*, wenn deren Korrelation gleich dem Produkt ihrer Mittelwerte ist.

Neben dieser Feststellung gibt es noch unzählige Anwendungen, Überlegungen und Aspekte der Korrelation, auf die wir nicht weiter eingehen. Das ist auch der Grund, wieso es keine einheitliche Definition oder Symbolik für diese Rechenoperation gibt.

Zur Nomenklatur sei noch gesagt, dass man bei der Korrelation zweier verschiedener Funktionen auch oft von *Kreuzkorrelation* spricht, wohingegen die *Autokorrelation* die Korrelation einer Funktion mit sich selbst beschreibt.

In Kap.4.2.3 wird ein Beispiel zur diskreten Kreuzkorrelation vorgestellt, in dem das Korrelationsintegral aus Gl.37 mit Hilfe der diskreten *Fouriertransformation* berechnet wird.

3.4. Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Obwohl die Methoden der *Fourieranalyse* und der kontinuierlichen *Fouriertransformation* für viele Vorgänge in der Natur sehr hilfreich sind und viele Messdaten durch kontinuierliche Funktionen angenähert werden können, hat man es i.A. stets mit diskreten Daten zu tun, deren Auswertung ebenso erforderlich ist. Daher erscheint es fürs Erste sinnvoll, die bisherigen Überlegungen auch auf diskrete Daten auszuweiten und die dabei auftretenden Eigenschaften zu diskutieren. Im weiteren Verlauf wird allerdings gezeigt, dass die DFT eigentlich 'viel mehr' als ein 'diskretes' Analogon zur kontinuierlichen FT ist und sich daraus faszinierende Anwendungsmöglichkeiten in der Wissenschaft und Technik ergeben. Einige dieser technischen Anwendungen werden dann ausführlich in Kap.4 behandelt, während sich das nachfolgende Kapitel eher mit dem mathematischen Hintergrund beschäftigt, das zum maßgeblichen Verständnis der vorliegenden Theorie beitragen sollte.

3.4.1. Herleitung und Definition

Bevor auf die genaue Herleitung und Definition der DFT eingegangen wird, sollen einige prinzipielle Überlegungen angestellt werden, die einen allgemeinen Überblick schaffen. Zuallererst ist es wichtig festzuhalten, dass es verschiedene Herangehensweisen zur Herleitung der DFT und ihrer Definition gibt, die auch in der Literatur nicht gerade einheitlich bearbeitet werden. Einerseits kann die DFT aus der Definitionsgleichung der kontinuierlichen FT hergeleitet werden, andererseits ist dies auch mit Hilfe der *Fourieranalyse* möglich, was dadurch gerechtfertigt ist, dass bei der *Fourieranalyse* zumindest die Fourierkoeffizienten diskret vorliegen (was bereits eine gewisse Ähnlichkeit mit der DFT impliziert). Ein ganz anderer Zugang ergibt sich bei der Diskussion über die Interpolation von Punktmen-gen durch *trigonometrische Polynome*, die unter gewissen Bedingungen ebenfalls zur DFT führt.

Alle drei Herangehensweisen sagen im Grunde das aus, was wir anfangs schon konstatiert haben; nämlich, dass jede beliebige Funktion mit (oftmals) unendlichen Summen *trigonometrischer Funktionen* dargestellt werden kann.

Im weiteren Verlauf werden wir die DFT mit Hilfe der Definitionsgleichung der Fourierkoeffizienten in (8) herleiten und verwenden dabei durchwegs eine Notation, die die Analogie zur *Fourieranalyse* und der kontinuierlichen *Fouriertransformation* zeigt.

Ausgangsbasis für die Herleitung ist der Übergang zu diskreten Daten in der *Zeitdomäne*:

$$t \longrightarrow t_k, \quad \text{mit} \quad t_k = k\Delta t \quad \text{und} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (39)$$

Damit hat man mit N diskreten Zeiten die Funktion in *Samples* vorliegen:

$$f(t_k) = f_k \quad \text{im Intervall} \quad T = N\Delta t. \quad (40)$$

T gibt dabei die Länge des Intervalls, in dem wir die f_k -Werte vorliegen haben, an. Im Gegensatz zur kontinuierlichen *Fouriertransformation* haben wir nun zwei Vereinfachungen auf einmal getroffen: einerseits haben wir nun keine kontinuierliche Funktion sondern

gesampelte Funktionswerte f_k vorliegen, andererseits wurde der Definitionsbereich unserer 'Funktion' (eigentlich der gegebenen f_k) auf die Intervalllänge T eingeschränkt. Da wir die Funktion (bzw. die diskreten Funktionswerte) außerhalb dieses Intervalls nicht kennen, nehmen wir an, dass diese mit der Periode T periodisch fortgesetzt wird/werden, was uns sofort zur Definitionsgleichung der *Fourieranalyse* führt. Wir formen Gl.8 etwas um indem wir die T -Periodizität ausnützen:

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^T f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen aus (39) und (40) nehmen wir nun den Übergang vom Integral zur (*Riemann'schen*) Summe vor:

$$C_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i j}{T} t} dt \quad \longrightarrow \quad F_j = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp \left\{ -\frac{2\pi i j k \Delta t}{N\Delta t} \right\} \Delta t$$

Diese Umformung passiert aufgrund der Überlegung, dass ein Integral näherungsweise mit Hilfe der *Trapezregel*³ berechnet werden kann. In unserem Fall haben wir aber keine 'Funktion' im eigentlichen Sinne vorliegen, die wir annähern wollten, sondern Punktwerte f_k , weshalb der obige Vorgang durchaus gerechtfertigt ist. Nach dem Kürzen können wir die *diskrete Fouriertransformation* (DFT) wie folgt definieren:

$$F_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{-kj}, \quad \text{mit } W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad (41)$$

Analog dazu lautet für die *inverse diskrete Fouriertransformation* (iDFT):

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{\frac{2\pi i j k}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} F_j W_N^{+kj} \quad (42)$$

W_N haben wir zweckmäßigerweise eingeführt, da wir in den nachfolgenden Kapiteln häufig mit dem Faktor $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ zu tun haben werden.

Bevor wir auf diese Definitionsgleichungen näher eingehen, behandeln wir noch die Überlegungen bei der *Interpolation von Punktmengen*, die uns im Grunde auf die gleichen Formeln zurückführen.

³ Hierbei werden alle Funktionswerte f_k mit Geraden verbunden und die Fläche darunter berechnet.

Bei der Formulierung des Interpolationsproblems geht man davon aus, dass man die Abzissen- und Ordinaten-Werte von N Punkten gegeben hat, wobei die Abzissen-Werte zwar nach ihrer Größe geordnet aber nicht unbedingt äquidistant vorliegen müssen. Die mathematische Behandlung des Problems zielt darauf ab, eine *möglichst glatte* (Interpolations-)Funktion zu finden, die für alle gegebenen Abzissen- und Ordinaten-Werte Gültigkeit hat. Da diese also durch die gegebenen Punkte gehen soll, müsste es darüberhinaus mit Hilfe dieser Funktion möglich sein, auch Werte zwischen den gegebenen Punkten zu ermitteln. Es gibt nun eine Reihe verschiedener mathematischer Ansätze, um dieses Problem zu behandeln, von denen wir uns im Folgenden auf die Interpolation durch *trigonometrische Funktionen* beschränken.

Wir gehen also davon aus, dass sich unsere gegebenen Datenpunkte auf dem Intervall T befinden und wir eine T -periodische Funktion suchen, die durch diese Datenpunkte verläuft. Dass dies möglich ist, besagen die in den *mathematischen Grundlagen* behandelten Sätze. Weiters nehmen wir an, dass unsere Stützpunkte äquidistant verteilt sind mit

$$t_k = k\Delta t \quad \text{und} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

und wir $t_0 = 0$ annehmen. Aufgrund der Erkenntnis, dass die Basisfunktionen einer *trigonometrischen Reihe* linear unabhängig⁴ sind (siehe dazu die Orthogonalitätsbedingung bei den Gl.6-7) und wir außerhalb unseres gegebenen Intervalls $T = N\Delta t$ die gesuchte Funktion periodisch fortsetzen, können wir für die gesuchte Interpolationsfunktion I die $(N-1)$ -te Partialsumme einer *trigonometrischen Reihe* ansetzen mit:

$$I(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j e^{\frac{2\pi i j}{T} t} \quad (43)$$

wobei wir für die gegebenen Punkte folgende Forderung stellen:

$$I(t_k) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \exp\left\{ \underbrace{\frac{2\pi i j}{T} t_k}_{\frac{2\pi i j}{N\Delta t} k\Delta t} \right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j e^{\frac{2\pi i k j}{N}} \stackrel{!}{=} f_k \quad (44)$$

Dies führt uns zur identen Gleichung wie in (42), also der Definitionsgleichung der iDFT, und wir erkennen, dass $\alpha_j \equiv F_j$ gilt.

Wir fassen zusammen: Bei einem Interpolationsproblem, bei dem N äquidistante Stützpunkte gegeben sind, ist es möglich, als Interpolationsfunktion ein *trigonometrisches Polynom* der Form in (43) zu wählen, bei dem zunächst die Koeffizienten F_j unbestimmt sind. Diese werden mit Hilfe der DFT aus Gl.41 berechnet und anschließend in Gl.43 eingesetzt, mit der sich die gewünschte Interpolationsfunktion ergibt.

⁴Die lineare Unabhängigkeit ist voraussetzend dafür, dass wir die obige Reihe nach dem $(N-1)$ -ten Glied abbrechen können.

3.4.2. Eigenschaften der DFT

Im Grunde übertragen sich alle Eigenschaften und Sätze der *Fourieranalyse* und der kontinuierlichen *Fouriertransformation* auf die DFT, von denen wir im Folgendem lediglich die veränderte Notation bei der DFT beachten.

Ausgangspunkt sind die beiden Transformationen

$$\begin{aligned}\{f_k\} &\leftrightarrow \{F_j\} \\ \{g_k\} &\leftrightarrow \{G_j\}\end{aligned}$$

mit welchen wir die nachfolgenden Sätze beschreiben.

Linearität:

$$\boxed{a\{f_k\} + b\{g_k\} \leftrightarrow a\{F_j\} + b\{G_j\}} \quad (45)$$

Verschiebungssatz:

$$\boxed{\{f_{k-n}\} \leftrightarrow \{F_j W_N^{-jn}\}} \quad (46)$$

Verschiebungssatz im Fourierraum:

$$\boxed{\{f_k W_N^{nk}\} \leftrightarrow \{F_{j-n}\}} \quad (47)$$

Bevor wir nun im Detail den Skalierungssatz bei der DFT ansprechen, wollen wir noch eine spezielle Eigenschaft der DFT diskutieren, die später eine wichtige Rolle spielen wird. Wir stellen uns jetzt nämlich die Frage, ob es nicht möglich wäre - analog zur kontinuierlichen *Fouriertransformation* - auch negative Frequenzen bzw. Fourierkoeffizienten mit negativem Index j in Gl.41 zu verwenden. Dazu formen wir Gl.41 zunächst etwas um und erhalten

$$F_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi ijk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left[\cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \right].$$

Nun setzen wir ein negatives j ein mit

$$F_{-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left[\cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \right]$$

und erkennen, dass sich lediglich das Vorzeichen im Imaginärteil verändert hat. Wir können also für *reelle* Funktionswerte f_k zunächst folgern, dass $F_{-j} = F_j^*$ ist. Setzen wir in die ursprüngliche Definitionsgleichung allerdings $N - j$ für den Index j ein, ergibt sich der

allgemeine Zusammenhang

$$\begin{aligned} F_{N-j} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left[\cos \left(\frac{2\pi k N}{N} - \frac{2\pi k j}{N} \right) - i \sin \left(\frac{2\pi k N}{N} - \frac{2\pi k j}{N} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left[\cos \left(\frac{2\pi j k}{N} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi j k}{N} \right) \right] = F_{-j}, \end{aligned}$$

aus dem wir nun eine Reihe an Schlussfolgerungen anstellen können.

Für jede beliebige Folge F_j von Fourierkoeffizienten gilt, dass die F_j , die von $j = \frac{N}{2}$ bis $j = N - 1$ verlaufen, eigentlich die negativen Frequenzen darstellen und somit gleich sind wie die F_j mit $j \in [-\frac{N}{2}; -1]$ sind. Daher stellt die Mitte der Folge der Fourierkoeffizienten die höchste im Fourierraum vorkommende Frequenz ω_{\max} bzw. $-\omega_{\max}$ dar, die zweckmäßigerweise als eigene Größe definiert wird. Bevor wir diese nun definieren leiten wir noch die diskreten Frequenzen für die DFT her:

$$w_j = \frac{2\pi}{T} j \quad \xrightarrow{t=N\Delta t} \quad w_j = \frac{2\pi}{N\Delta t} j \quad \text{bzw.} \quad \nu_j = \frac{j}{N\Delta t}$$

Setzen wir nun für $j = \frac{N}{2}$, erhalten wir die sog. *Nyquist-Frequenz* mit:

$$\Omega_{\text{Nyq}} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad \nu_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2T} \quad (48)$$

Die *Nyquist-Frequenz* macht einerseits weitreichende Aussagen über die notwendige Anzahl der Samples (zur eindeutigen Rekonstruktion einer Funktion), die wir im nachfolgenden Kapitel diskutieren werden, und andererseits ist durch die Gl.48 bereits ein Analogon zum bereits diskutierten **Skalierungssatz** gegeben.

Nun definieren wir noch die *Frequenzauflösung* $\Delta\omega$ bzw. $\Delta\nu$ mit

$$\Delta\omega = \omega_{j+1} - \omega_j \quad \longrightarrow \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\nu = \frac{1}{T},$$

und die *Abtast-* bzw. *Samplingrate* f_a mit

$$f_a = \frac{1}{\Delta t},$$

mit denen wir die Beziehungen aus der *Nyquist-Frequenz* besser interpretieren können: Denn, wie aus Gl.48 und den obigen Beziehungen leicht erkennbar, führt eine große Periode T zu einer hohen Frequenzauflösung und eine große Sample-Anzahl N zu einem großen Frequenzbereich. Vor allem für technische Anwendungen spielt dieser Satz eine herausragende Rolle, da er klarmacht, dass zum Beispiel bei Erhöhung der *Sample*-Anzahl die Auflösung am Spektrum unverändert bleibt. Weiters ist erkennbar, dass die *Nyquist-Frequenz* der halben *Samplingrate* entspricht, was vor allem beim später behandelten *Sampling-Theorem* in Kap.3.4.4 von Bedeutung sein wird.

Der oben diskutierte Sachverhalt, also die Tatsache, dass man Fourierkoeffizienten F_j mit $j > \frac{N}{2}$ eigentlich im negativen Bereich (also für $j < 0$) anordnen kann, nennt man im Fachjargon *wrapping*. Bei *reellen* Funktionenwerten gilt zudem die Beziehung

$$F_{N-j} = F_j^* \quad (49)$$

wobei im Spezialfall eines *geraden* Inputs, bei dem die Fouriertransformierte *reell* ist, die obige Beziehung auch ohne das komplex-konjugierte *-Zeichen gilt.

Aus dieser Diskussion können wir nun drei wichtige Schlüsse ziehen, die später für die praktische Behandlung eine wichtige Rolle spielen:

(i): Bei der DFT wird nicht nur die gegebene Folge der Funktionenwerte f_k als periodisch angenommen. Die Folge ihrer Fouriertransformierten F_j , der die Frequenzen ω_j bzw. ν_j zugeordnet sind, ist ebenfalls periodisch und die F_j können von einem Intervall zum anderen *gewrappt* werden. Das *wrapping* funktioniert genau so für den negativen Frequenzbereich.

(ii): Die höchste im Fourierraum vorkommende Frequenz ist die *Nyquist-Frequenz* Ω_{Nyq} ; das darf aber nicht so verstanden werden, als gäbe es keine höheren Frequenzen im Fourierraum. Für höhere Frequenzen werden die Fourierkoeffizienten lediglich aus dem doppelten *Nyquist-Intervall herumgewrappt*. Daher kann eigentlich gesagt werden, dass die Folge F_j der Fourierkoeffizienten mit dem doppelten *Nyquist-Intervall* periodisch ist.

(iii): Wegen der Periodizität der Fourierkoeffizienten und des Kerns W_N ist es bei der iDFT daher gleichgültig, welches Intervall aus dem Fourierraum ausgewählt wird. Bei Interpolationsproblemen können dadurch Schwierigkeiten auftreten, die im Kap.4.2.1 genauer diskutiert werden.

Nun behandeln wir dazu ein einfaches Beispiel.

Beispiel 7: 'Kosinus mit $N = 4$ '. Es seien nun vier Stützpunkte einer Kosinusfunktion gegeben:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, & \text{an } t_0 &= 0 \\ f_1 &= 0, & \text{an } t_1 &= 1 \\ f_2 &= -1, & \text{an } t_2 &= 2 \\ f_3 &= 0, & \text{an } t_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wir bilden nun die Fouriertransformierten F_j , indem wir in Gl.41 einsetzen und dabei die oben diskutierten Beziehungen ausnutzen:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 - 1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0) = 0 \\ F_1 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^0 - 1 \cdot e^{\pi i 2}) = \frac{1}{2} \\ F_2 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^0 - 1 \cdot e^{2\pi i}) = 0 \rightarrow F_{-2} \\ F_3 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^0 - 1 \cdot e^{3\pi i}) = \frac{1}{2} \rightarrow F_{-1} \end{aligned}$$

Wollten wir aus den F_k nun wieder unsere f_k berechnen, bräuchten wir diese nur in Gl.42 einsetzen. Wir setzen sie aber in die Interpolationsfunktion in (43) ein und nützen dabei das bisher Gesagte indem wir die Summe in Gl.43 von $j = -\frac{N}{2}$ bis $j = \frac{N}{2} - 1$ bilden. Dann folgt für die Interpolationsfunktion $I(t)$:

$$I(t) = 0 \cdot e^0 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i}{4} \cdot 1 \cdot t} + 0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 2 \cdot t} + \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 1 \cdot t} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2} it} + e^{-\frac{\pi}{2} it} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2} it} + e^{-\frac{\pi}{2} it}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

In Abb.10 sind nun die gegebenen Punkte f_k , deren Fouriertransformierte F_j sowie die Interpolationsfunktion dargestellt. Anhand dieses einfachen Beispiels lässt sich eigentlich alles bisher Gesagte zeigen: die Funktion wird mit der Periode T periodisch fortgesetzt und ebenso liegen alle gegebenen Punkte auf der Interpolationsfunktion.

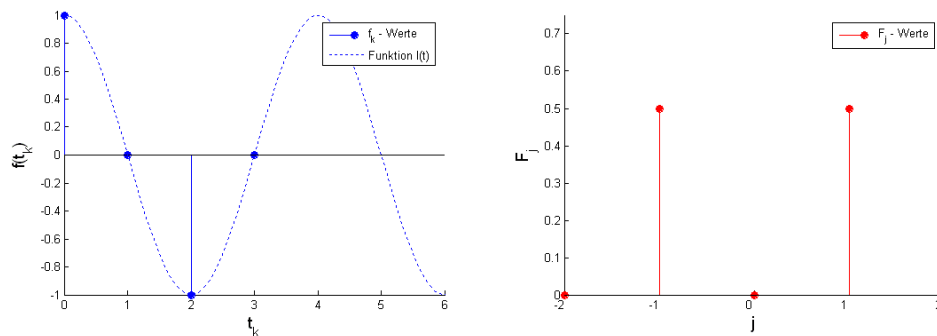


Abbildung 10: Darstellung der gegebenen f_k -Werte aus Beispiel 7 (links), der Fouriertransformierten F_j (rechts) und der daraus berechneten Interpolationsfunktion $I(t)$ (links).

3.4.3. Faltung, Korrelation, Parsevals Theorem

Nachdem die Bedeutung des Faltungssatzes und der Korrelation bereits zu Genüge erläutert wurde, soll an dieser Stelle lediglich auf die veränderte Notation bei der DFT eingegangen werden.

Logischerweise ergibt sich bei der diskreten Faltung und Korrelation zunächst die Bedingung, dass die Anzahl der Samples gleich sein muss. Dies kann aber dadurch umgangen werden, dass man einfach mehr Funktionenwerte einführt, die alle Null ergeben. Weiters würden sich aufgrund der nachfolgenden Formeln Indizes ergeben, die entweder in den negativen Bereich oder über N hinaus gehen. In solchen Fällen wird einfach die angenommene Periodizität der Funktionenwerte ausgenutzt und diese werden wie vorher besprochen einfach in den jeweilig gegebenen Bereich umgeklappt (*wrap around*).

Faltungssatz:

$$h_k = (f \otimes g)_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \cdot g_{k-l} \quad (50)$$

Korrelation:

$$h_k = (f \odot g)_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \cdot g_{k+l}^* \quad (51)$$

Parsevals Theorem:

$$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} |f_l|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |F_j|^2 \quad (52)$$

3.4.4. Nyquist-Shannon-Abtasttheorem, Aliasing

Da nun bekannt ist, dass die Folge der Fourierkoeffizienten periodisch mit N , also $F_j = F_{N+j}$, und durch die *Nyquist-Frequenz* beschränkt ist, stellt sich die Frage, welche Klassen von Funktionen aufgrund gegebener Anzahl an *Samples* eindeutig rekonstruiert werden können. Dazu dient folgender Satz:⁵

Satz 7 (von Shannon):

Bezeichne f eine beschränkte und *absolut integrierbare* Funktion, die im Abstand Δt abgetastet wird. Wenn f in ihrem kontinuierlichen Frequenzspektrum durch die Nyquist-Frequenz Ω_{Nyq} beschränkt ist, d.h., dass für die Fouriertransformierte F die Beziehung $F(\omega) = 0$ für alle ω mit $|\omega| \geq \Omega_{\text{Nyq}}$ gilt, so ist die Funktion f komplett durch die folgende Formel bestimmt:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) \frac{\sin[\Omega_{\text{Nyq}}(t - k\Delta t)]}{\Omega_{\text{Nyq}}(t - k\Delta t)} \quad (53)$$

Wir können also nur jene Funktionen für alle Zeiten t rekonstruieren, deren Frequenzspektrum auf ein gewisses Intervall limitiert ist (also wenn die Funktion selber *bandbreitenlimitiert* ist). Die *Sampling-Rate* f_a muss also so gewählt werden, dass die *Nyquist-Frequenz* größer als alle im Spektrum vorkommenden Frequenzen sind; das wiederum bedeutet - da

⁵Häufig wird dieser Satz in der Literatur auch *Sampling-* oder *WKS-Theorem* (für Whittaker-Kotelnikow-Shannon) genannt.

die *Sampling*-Rate mit $f_a = 2\nu_{\text{Nyq}}$ gegeben ist -, dass die Sampling-Rate mindestens so groß sein darf wie die doppelte *Nyquist*-Frequenz, um die Funktion noch eindeutig rekonstruieren zu können.

In der Praxis kommen folgende zwei störende Faktoren hinzu:

1. Wir betrachten bekanntlich Punktmengen und nehmen an, dass diese Punktmengen einem gewissen funktionalen Zusammenhang $f(t)$ unterliegen, den wir mit Hilfe der DFT suchen. Da wir die gesuchte Funktion a priori nicht kennen, können wir auch nicht sagen ob die *Samples*, die wir von der Funktion gegeben haben, in der optimalen *Sampling*-Rate vorliegen.
2. Da wir bei der DFT die gegebene Punktmenge immer als periodisch annehmen, ist ein naheliegender Schluss der, dass wir in den meisten Fällen (sollte die Punktmenge tatsächlich einer periodischen Funktion angehören) die eigentliche Periode der Punktmenge gar nicht kennen.

Grundsätzlich können wir keinen der beiden Faktoren eliminieren und wir bekommen stets störende Nebeneffekte: im ersten Fall den sog. *Aliasing*-Effekt, im zweiten den *Leakage*-Effekt (Leck-Effekt).

Bezüglich des *Aliasing*-Effekts behandeln wir ein Beispiel, den *Leakage*-Effekt werden wir im nächsten Kapitel und in Kap.4.2.1 näher erläutern.

Beispiel 8: 'Kosinus mit $\omega = 1$ '. Wir betrachten nun eine 2π -periodische Kosinusfunktion $f(t) = \cos(t)$, von der wir 8 Samples für 5 Perioden gegeben haben. Wir werden also bemüht sein, anhand dieser Samples die ursprüngliche Funktion zu rekonstruieren. Da wir die Funktion stillschweigend schon kennen, können wir bereits im vornhinein einige Untersuchungen anstellen. Die Nyquist-Frequenz beträgt bei der gegebenen *Sampling*-Rate mit Hilfe der Gl.40 und 48

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{5 \cdot 2\pi}{8} = \frac{5}{4}\pi \quad \longrightarrow \quad \Omega_{\text{Nyq}} = \frac{\pi}{\Delta t} = 0,8$$

und ist somit um 20% geringer als die eigentliche Frequenz ω der gegebenen Funktion, wodurch die *Shannon*'sche Bedingung zur eindeutigen Rekonstruktion einer Funktion nicht erfüllt ist. Wir berechnen nun die Fourierkoeffizienten F_j anhand der gegebenen Punkte f_k

$$f_0 = 1, \quad f_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_4 = -1, \quad f_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_6 = 0, \quad f_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit Hilfe der Definitionsgleichung der DFT in (41), woraus für die F_j folgt:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = \frac{1}{2}, \quad F_4 = 0, \quad F_5 = \frac{1}{2}, \quad F_6 = 0, \quad F_7 = 0$$

Diese werden dann in die Interpolationsfunktion in Gl.43 eingesetzt, wobei wir die Summe wieder von $j = -\frac{N}{2}$ bis $j = \frac{N}{2} - 1$ bilden und die obigen Fourierkoeffizienten in den negativen Bereich *wrappen*. Daraus folgt:

$$I(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i 3}{10\pi}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2\pi i 3}{10\pi}t} = \cos\left(\frac{3}{5}t\right)$$

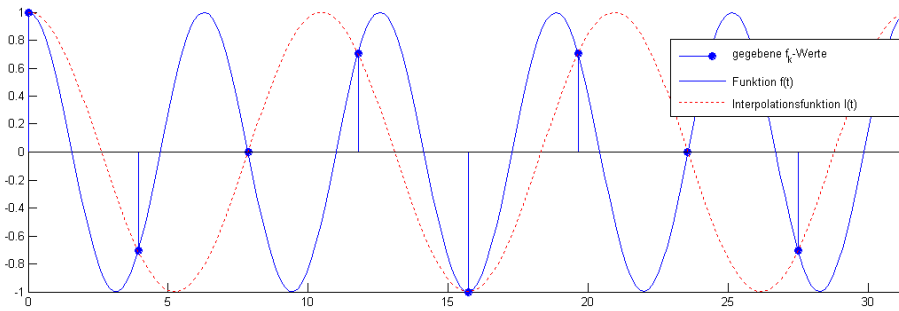


Abbildung 11: Darstellung der gegebenen Funktionenwerte f_k , der Funktion $f(t)$ mit $\omega = 1$ und der berechneten Interpolationsfunktion $I(t)$ mit $\omega = \frac{3}{5}$.

Es wurde zwar eine passende Interpolationsfunktion $I(t)$ gefunden, allerdings entspricht sie nicht der gegebenen Funktion $f(t)$; die Frequenz der Interpolationsfunktion ist um 40% kleiner als die der ursprünglich gegebenen.

Der sog. *Aliasing*-Effekt besagt nun, dass alle Frequenzkomponenten einer Funktion, die sich außerhalb der Bandbreite $[-\Omega_{\text{Nyq}}; +\Omega_{\text{Nyq}}]$ befinden, nach einer DFT in diesen Bereich hineingespiegelt werden.⁶ Das bedeutet, es treten Frequenzen auf, die eigentlich gar nicht zum Spektrum der eigentlichen Funktion gehören. In unserem Fall bedeutet das folgendes:

$$\omega - \Omega_{\text{Nyq}} = 1 - 0,8 = 0,2 \quad \longrightarrow \quad \omega_{\text{alias}} = \Omega_{\text{Nyq}} - 0,2 = \frac{3}{5}$$

Hier haben wir mit ω_{alias} die Frequenz bezeichnet, die durch den *Alias*-Effekt als Lösung des Interpolationsproblems herauskommt.

3.4.5. Zero-Padding

Neben der oben behandelten Problematik des *Aliasings* kann in den meisten Fällen die eigentliche Periode der gegebenen Punktmenge a priori gar nicht ermittelt werden. Bisher haben wir nämlich (in den zwei vorangehenden Beispielen) stets Punktfolgen betrachtet, die ohne Probleme periodisch fortgesetzt werden konnten. Nun passiert es aber häufig, dass mit dem *Sampling* zum falschen Zeitpunkt aufgehört wird und die somit gegebene Folge von Funktionswerten f_k gar kein ganzzahliges Vielfaches ihrer eigenen Periode darstellt. In einem solchen Fall treten dann nach der DFT im Fourierraum weitere Spektralkomponenten auf. Dieses Phänomen wird allgemein *Leakage*(-Effekt) genannt und kann meist mit Filtern und eventuell mit sog. *Fensterfunktionen* reduziert, jedoch niemals komplett

⁶Anbei sei angemerkt, dass dieses 'Hineinspiegeln' bei komplexen Koeffizienten stets nach der Beziehung aus (49) betrachtet werden muss. Daher werden bei *reellen* Fourierkoeffizienten die Frequenzkomponenten außerhalb des Intervalls $[-\Omega_{\text{Nyq}}; +\Omega_{\text{Nyq}}]$ positiv hineingespiegelt, also addiert, und bei *komplexen* Fourierkoeffizienten negativ, also im *Nyquist*-Intervall $[-\Omega_{\text{Nyq}}; +\Omega_{\text{Nyq}}]$ subtrahiert.

behalten werden.

Weiters sind wir bisher bei unseren Interpolationsproblemen immer von periodischen Punktmengen f_k ausgegangen, was uns die Herleitung der DFT überhaupt ermöglicht hat. Die Frage, die sich stellt, ist naheliegend: Ist eine DFT auch für aperiodische Punktmengen möglich und - wenn ja - wie verhält es sich mit den Eigenschaften?

Die Antwort leitet sich eigentlich aus allen bisherigen Überlegungen rund um die *Fouriertransformation* ab, die wir im Grunde auf die Weise hergeleitet haben, dass wir die Periode unendlich ausgedehnt haben; theoretisch ist dies auch hier möglich, jedoch begnügt man sich in der Praxis mit gewissen Näherungen. Die Periode kann also dadurch ausgeweitet werden, indem der neu hinzugefügte Bereich mit Nullen ausgefüllt wird (*Zero-Padding*). Diese Vorgangsweise wird daher in folgenden Fällen angewandt:

- Bei einer Folge von Funktionenwerten, von der man weiß, dass sie aperiodisch ist, werden vorne und hinten ausreichend Nullen angefügt, wodurch die Periode T vergrößert wird und quasi eine unendliche Periode 'simuliert' wird. Daher sind die Überlegungen rund um die DFT ebenso auf aperiodische Folgen von Funktionenwerten ausweitbar.
- Bei der Faltung oder Korrelation zweier Funktionen würden aufgrund der Rechenvorschrift (bzgl. Indizes) jeweils Werte aus der vorangehenden oder nachfolgenden Periode in das Ergebnis einfließen. Fügt man aber zu den gegebenen Punktmengen f_k und g_k am Anfang bzw. am Ende jeweils ausreichend Nullen hinzu, erübrigt sich dieser Effekt. Darüberhinaus kann auf diese Weise die Faltung oder Korrelation zweier Folgen von Funktionenwerten f_k und g_k , die ungleich viele Werte besitzen, überhaupt erst (korrekt) berechnet werden.
- Bei Folgen von Funktionswerten, die bei einer periodischen Fortsetzung Sprungstellen bekämen, wird die Methode des *Zero-Paddings* angewandt, um diese bewusst zu eliminieren und die (eventuell) gesuchte Interpolationsfunktion zu glätten.

3.4.6. Schnelle Fouriertransformation (FFT)

Zu den wichtigsten Errungenschaften des 20. Jahrhunderts in Bezug auf die (diskrete) *Fouriertransformation* zählt der im Jahre 1965 von Cooley und Tukey entwickelte Algorithmus zur 'schnellen' Berechnung der FT (*Fast Fourier Transform*).

Wie aus den bisher behandelten Beispielen hervorgeht, stellt die Berechnung der Fourierkoeffizienten einen Prozess der Ordnung N^2 dar, da wir N Summen mit N Gliedern haben (vgl. dazu Gl.41 und Gl.42). Dabei wird jeder einzelne Fourierkoeffizient unabhängig vom vorhergehenden berechnet, was durch das Quadrat bei der *Sample*-Anzahl zu einer hohen Rechenzeit führt, wenn man viele Stützpunkte gegeben hat. Nun stellt sich die Frage, ob es nicht auch einen rekursiven Algorithmus geben könnte, mit dem man aus bereits errechneten Werten weitere Fourierkoeffizienten bestimmen kann; gerade die Beantwortung dieser Frage führte zur Herleitung der FFT.

Hierbei muss die Anzahl der Stützpunkte durch eine 'ganze' Potenz p von 2 gegeben sein

(also $N = 2^p$). Nun wird die Folge der Funktionswerte f_k auf zwei Unterfolgen aufgeteilt, von denen eine nur die geraden, die andere nur die ungeraden Elemente zusammenfasst:

$$\begin{array}{ccc} & \{f_k\} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \{f_{1,k}\} = \{f_{2k}\} & & \{f_{2,k}\} = \{f_{2k+1}\} \\ \text{gerade Elemente} & & \text{ungerade Elemente} \end{array}$$

Der Index k läuft nun von $k = 0, 1, \dots, M - 1$ (mit $M = \frac{N}{2}$), wobei beide Perioden periodisch mit $\frac{N}{2}$ sind.

Mit den nun veränderten Folgen ergeben sich die zugehörigen Fouriertransformierten mit

$$\begin{aligned} F_{1,j} &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f_{1,k} W_M^{-kj}, \\ F_{2,j} &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f_{2,k} W_M^{-kj}, \end{aligned} \quad \text{mit } j = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Diese können wir nun in die ursprüngliche Definitionsgleichung der DFT in (41) einsetzen und erhalten somit:

$$\begin{aligned} F_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{-kj} = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{M-1} f_{2k} W_N^{-2kj} + \sum_{k=0}^{M-1} f_{2k+1} W_N^{-(2k+1)j} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} f_{1,k} W_M^{-kj} + \frac{W_N^{-j}}{N} \sum_{k=0}^{M-1} f_{2,k} W_M^{-kj} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden dabei folgende Beziehungen benutzt:

$$\begin{aligned} W_N^{-2kj} &= e^{-2 \frac{2\pi i k j}{N}} = e^{\frac{2\pi i k j}{M}} = W_M^{-kj} \\ W_N^{-(2k+1)j} &= e^{-2 \frac{2\pi i (2k+1) j}{N}} = W_M^{-kj} W_N^{-j} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich nach dem sog. 'ersten Teilen' für die Fourierkoeffizienten F_j der Ausdruck

$$F_j = \frac{1}{2} F_{1,j} + \frac{1}{2} W_N^{-j} F_{2,j}, \quad \text{mit } j = 0, 1, \dots, M - 1,$$

woraus wir die etwas allgemeinere Form auffassen:

$$\boxed{\begin{aligned} F_j &= \frac{1}{2} \left[F_{1,j} + F_{2,j} W_N^{-j} \right] \\ F_{j+M} &= \frac{1}{2} \left[F_{1,j} - F_{2,j} W_N^{-j} \right] \end{aligned} \quad \text{mit } j = 0, 1, \dots, M - 1}$$

Aus dem letzten Ausdruck folgt dabei bereits ein wichtiger Schluss, auf dessen Prinzip die gesamte FFT aufbaut: Die Werte F_j und F_{j+M} können also beide aus denselben Zwischenwerten bestimmt werden indem man nur das Vorzeichen variiert. Dieser Vorgang wird nun so oft wiederholt, bis nach Anwendung der obigen Formeln eine eingliedrige 'Zahlenfolge' übrigbleibt, deren Fouriertransformierte ja identisch mit dem Funktionswert ist (siehe dazu Gl.52, *Parsevals Theorem*); daher ist auch die Einschränkung für die Anzahl der Stützstellen mit $N = 2^p$ einsichtig, da nach jedem Teilen das Ergebnis wieder durch 2 teilbar sein muss, bis schließlich nur die eingliedrige 'Zahlenfolge' übrigbleibt.

Dieser Umstand stellt bereits eine bedeutende 'Verschnellerung' der ursprünglichen Berechnung der Fourierkoeffizienten dar, bei dem jeder Koeffizient einzeln und unabhängig von anderen bestimmt wurde. Es ist nun auch klar, dass dieser Vorgang so lange wiederholt werden kann, bis alle Fourierkoeffizienten bestimmt sind. Die Anzahl der Rechenschritte ist hierbei $N \ln(N)$.

Die Ausgabe der Fourierkoeffizienten erfolgt dabei nach dem *Butterfly*- bzw. *Schmetterlings*-Schema, bei dem die Fourierkoeffizienten in umgedrehter Bit-Reihenfolge ausgegeben werden. Mit dem *Bitreversal* kann diese jedoch leicht umgeordnet werden und diese ist auch in den meisten Fällen bereits in den Algorithmen zur DFT implementiert.

Abschließend sei noch angemerkt, dass es mittlerweile eine Menge Verallgemeinerungen und Umformungen des ursprünglichen Algorithmus von Cooley und Tukey gibt, die jeweils nach Verwendungstyp (abhängig von der *Sample*-Anzahl N) verschieden eingesetzt werden und teilweise um einiges schneller sind. Weiters kommt auch in einigen modernen FFT-Programmen die strenge Bedingung, dass $N = 2^p$ sein muss, nicht mehr vor (siehe z.B.: M. Frigo u S. G. Johnson, *Proc. of the IEEE* 93 (2), 216-231 (2005)).

4. Anwendungsmöglichkeiten der Fouriertransformation

Bei der Diskussion rund um die Fouriertransformation ist es selbstverständlich wichtig, sich ausreichend mit der Theorie und dem mathematischen Hintergrund dieser Thematik zu befassen. Allerdings ist - wie in den meisten Fällen im wirklichen Leben - jegliche Theorie unbegründet, wenn sich aus ihr keine praktischen Anwendungen ergeben; umgekehrt werden Phänomene in der Natur erst zu jenem Zeitpunkt für wissenschaftliche Anwendungen bedeutend, wenn sie durch theoretische Überlegungen kategorisiert und erklärt werden können. Aus diesem Grund ist es das Ziel dieses Kapitels, einen allgemeinen Überblick über die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Fouriertransformation zu schaffen und durch einige ausgewählte Beispiele gewisse Methoden in der praktischen Handhabung zu zeigen.

Bekanntlich liegt die Aufgabe der Physik darin, Vorgänge in der Natur zu beobachten, theoretisch zu erklären und quantitativ zu erfassen. Bei der theoretischen Behandlung stützt sie sich auf die Mathematik und aufbauend auf Axiomen werden Modelle entworfen, die mit dem Beobachteten einhergehen und in weiterer Folge Voraussetzungen für eine quantitative Erfassung erst möglich machen. Daher haben wir prinzipiell zwei in ihren Absichten etwas verschiedene Herangehensweisen bei physikalischen Problemen: Zum einen sind wir an der Theorie, also der Analytik, interessiert; zum anderen schaffen wir bestimmte Messvorschriften, um das Beobachtete quantitativ zu erfassen, auszuwerten und eventuell mit anderen Größen zu vergleichen.

Angewendet auf die Fouriertransformation kann also gesagt werden, dass sie in allen Gebieten der Physik und Mathematik Anwendung findet, in der gewisse Größen in Abhängigkeit von anderen Größen betrachtet und deren funktionale Zusammenhänge analysiert werden. Hierbei ist es sehr schwer eine klare Linie zwischen der analytischen und der numerischen Anwendung (in Form der DFT) zu ziehen, da - wie geschildert - die Motive oftmals unterschiedlich sind. Daher werden nachfolgend einige Anwendungsmöglichkeiten der FT aufgelistet, die sowohl analytisch als auch numerisch eine Rolle spielen.

Periodische Funktionen

Zur *Fouriertransformation* bzw. *Fourieranalyse* kann allgemein gesagt werden, dass sie zunächst überall dort Anwendung findet, wo mit trigonometrischen Funktionen gerechnet wird oder diese untersucht werden. Viele periodische Funktionen, die in verschiedenen Bereichen der Technik (Akustik, Signaltechnik, Optik, Astrophysik, etc.) auftreten, kann man mit Summen trigonometrischer Funktionen (wie im Kapitel über die *Fourieranalyse* beschrieben) darstellen und untersuchen.

Akustik

In der Akustik kommt die Fourier-Theorie unter verschiedenen Aspekten zum Einsatz. Ausgangspunkt ist dabei die Annahme, dass ein beliebiger Ton aus einem sog. *Grundton* und beliebig vielen *Obertönen* aufgebaut ist; alle werden dabei als Sinus- bzw. Kosinus-Schwingungen angenommen, die sich in ihrer Frequenz und eventuell Intensität unterscheiden. Daher kann eigentlich jedes beliebige Geräusch mathematisch mit Hilfe der Fourierreihe beschrieben werden (also als Summe von einzelnen spektralen Komponenten), was folgende Anwendungen zur Folge hat:

- Klangerzeugung: Bei der synthetischen Klangerzeugung in Form von Synthesizern werden verschiedene Klänge eben auf dem Prinzip der Fouriersynthese (=Zusammensetzung einer Funktion aus ihren einzelnen harmonischen Komponenten) erzeugt. Durch Veränderung verschiedener Parameter (Periode, Frequenz, Intensität) kann somit die erzeugte Klangfarbe⁷ variiert werden.
- Klangmanipulation: Ein akustisches Signal wird oft im Frequenzraum manipuliert, womit man verschiedene Klangänderungen erreichen kann (wie z.B. die Verstärkung oder Unterdrückung von nieder-/hochfrequenten Tönen). Auf diesem Prinzip basieren verschiedene Filter.
- Klanganalyse: Zur Unterscheidung von verschiedenen Klangfarben wird ein Ton in den Fourierraum abgebildet, womit die spektrale Zusammensetzung untersucht werden kann.

Optik

Die gesamte *Fourier-Optik* basiert auf der Theorie der Fouriertransformationen. Diese behandelt unter anderem alle Phänomene rund um optische Filtereinrichtungen, die in erster Linie bei Bildrekonstruktionen oder anderen Manipulationen am Bild eingesetzt werden. Ausgangspunkt ist wiederum die Annahme, dass man Licht als Welle (bzw. Anhäufung von Wellenzügen) betrachten und somit mit Sinus- bzw. Kosinus-Schwingungen beschreiben kann.

Filtereinrichtungen

All diesen Beispielen liegen Manipulationen im Zeit- bzw. Frequenzraum und die dadurch verursachten Änderungen im Frequenz- bzw. Zeitraum zugrunde. Allgemein nennt man Funktionen bzw. 'Vorrichtungen' mit frequenzabhängigen Eigenschaften, also Übertragungsmechanismen, die eine frequenzabhängige Selektion des Signals durchführen, *Filter*. Diese werden in nahezu allen Bereichen der Physik angewendet.

4.1. FT in der analytischen Mathematik

Die analytische Behandlung gewisser mathematischer und physikalischer Probleme spielt nicht nur aufgrund der Exaktheit des Ergebnisses eine bedeutende Rolle, sondern 'liefert' bei Änderung der Anfangsbedingungen 'sofort' ein verändertes exaktes Ergebnis. Deshalb ist auch die FT in der Analytik (in allen bisher genannten Bereichen) überaus wichtig, da sie auf diese Weise Eigenschaften verschiedener physikalischer Modelle (wie etwa die *Unschärferelation* in der Quantenmechanik) besser klären kann.

Oftmals ist die exakte analytische Beschreibung und Lösung des Problems zudem nicht sehr kompliziert oder es kann ein komplizierter funktioneller Zusammenhang durch ein vereinfachendes leicht auszuwertendes Modell befriedigend angenähert werden, weshalb

⁷Für unterschiedliche Klangfarben sind bekanntlich die Obertöne verantwortlich. So klingt z.B. bei verschiedenen Musikinstrumenten der Kammerton A (440Hz) verschieden, obwohl die Grundfrequenz gleich ist.

die analytische Behandlung einer numerischen Rechnung oft vorzuziehen ist. Die wichtigste Anwendung der FT in der analytischen Mathematik ergibt sich aber bei der Behandlung von Rand-Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen. Denn aus den Eigenschaften der FT geht bekanntlich hervor, dass Funktion und Fouriertransformierte eindeutig bestimmt sind, woraus folgt, dass es keinen Unterschied macht, ob man eine Funktion im Zeit- oder Frequenzraum beschreibt. In vielen Fällen jedoch vereinfacht die Darstellung einer Funktion im Frequenzraum das gesamte Problem oder ermöglicht überhaupt dessen Lösung.

4.1.1. Beispiel: Diffusionsgleichung

Wir betrachten nun ein Beispiel aus der Physik, um die Anwendungsmöglichkeit der FT bei der Lösung von partiellen DGL zu demonstrieren.

Gegeben sei die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (54)$$

mit der Temperatur T und der Temperaturleitfähigkeit κ .

Wir haben also eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben, die die Temperatur $T(x, t)$ in einem langen Metallstab beschreibt. Es handelt sich dabei um ein Anfangswertproblem, da $T(x, 0)$ als gegeben angenommen wird. Wir wollen nun die Temperatur T für alle Zeiten bestimmen.

Ausgangspunkt für die weitere Rechnung ist die Fouriertransformierte $\tau(k, t)$ der Temperatur, die laut Gl.24 folgendermaßen gegeben ist:

$$\tau(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) e^{-ikx} dx$$

Wir machen also eine Transformation aus dem Ortsraum in den Wellenzahlraum, wobei die Zeit t als konstant angenommen wird. Für die Rücktransformation gilt daher:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) e^{ikx} dk.$$

Diese können wir nun in Gl.54 einsetzen, woraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) e^{ikx} dk \right) &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) e^{ikx} dk \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau(k, t)}{\partial t} e^{ikx} dk &= \kappa (ik)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit dem Faktor $e^{-ik'x}$ und integrieren über x , woraus

sich nach Kürzen des Vorfaktors $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau(k, t)}{\partial t} e^{ikx} dk \right) e^{-ik'x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-k^2 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) e^{ikx} dk \right) e^{-ik'x} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau(k, t)}{\partial t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx}_{2\pi\delta(k-k')} dk &= -k^2 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx}_{2\pi\delta(k-k')} dk \\ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau(k, t)}{\partial t} \delta(k - k') dk &= -2\pi k^2 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) \delta(k - k') dk \end{aligned}$$

Aus den Beziehungen für die δ -Distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k) \delta(k - k') = f(k') \quad \text{und} \quad f(k) \delta(k - k') = f(k') \delta(k' - k)$$

folgt letztendlich die anfangs gegebene partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \tau(k, t)}{\partial t} = -k^2 \kappa \tau(k, t)$$

Diese nun gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung kann leicht gelöst werden mit

$$\int \frac{\partial \tau(k, t)}{\tau(k, t)} = - \int k^2 \kappa dt \quad \longrightarrow \quad \ln(\tau(k, t)) = -k^2 \kappa t + C$$

wobei unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung mit $\mathfrak{F}\{T(x, 0)\} = \tau(k, 0)$ folgt:

$$\tau(k, t) = e^{-k^2 \kappa t} \tau(k, 0)$$

Um nun zur anfangs gewünschten Temperatur $T(x, t)$ zu gelangen muss $\tau(k, t)$ lediglich rücktransformiert werden:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, t) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(k, 0) e^{-k^2 \kappa t + ikx} dk$$

Dieser Ausdruck entspricht der allgemeinen Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Man kann in der Praxis aber oft $T(x, 0) = \delta(x)$ wählen (was einer punktförmigen Wärmequelle entspricht), wodurch sich obiger Ausdruck auf die spezielle Lösung (mit einer Konstanten A) reduziert:

$$T(x, t) = A \cdot \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4\kappa t} \right\}$$

4.2. FT bei numerischer Auswertung

Neben der analytischen Behandlung gewisser Problemstellungen mit Hilfe der FT, die in solchen Fällen bereits ein sehr brauchbares Werkzeug zur Verfügung stellt, liegt die eigentliche Anwendung in der Auswertung diskreter Daten. Vor allem durch die Tatsache, dass heutzutage nahezu alle Messeinrichtungen digitalisiert sind und die Experimentalphysik auf der Aufnahme diskreter (Mess-)Daten und deren Diskussion (z.B.: Fehlereinschätzung) basiert, hat man es in der Praxis fast immer mit diskreten Daten zu tun und ist bemüht, diese möglichst effizient auszuwerten.

Dabei spielt besonders der Aspekt der Interpolation von gegebenen Punktmengen mit Hilfe der DFT eine besondere Rolle, von denen zwei nachfolgend aufgelistet sind.

Datenglättung

Mit der Transformation einer Funktion in ihren Frequenzraum und der darauf folgenden Manipulation in diesem sind die Methoden der Datenglättung, bei der eine stark oszillierende Funktion durch eine glattere ersetzt wird, eng verbunden (siehe dazu Kap.4.2.2). Anwendung finden diese Methoden z.B. bei der Bildrekonstruktion, bei der dadurch u.a. die Intensität oder die Übergänge an Kanten variiert werden können. Dazu ist allerdings die Definition der FT für mehrdimensionale Räume notwendig, die mathematisch aber leicht hergeleitet werden kann.

Datenkomprimierung

Vor allem beim Vorhaben, kontinuierliche Messsignale (z.B. Musik, Video, etc.) zu digitalisieren, kann man viel Speicherplatz (der ja in Form von einzelnen Bits, also Stützstellen f_k , zur Verfügung steht) sparen, indem man eine 'optimale' Abtastrate einstellt, die nur jene Punkte aufnimmt, die für die Rekonstruktion des ursprünglichen Signals unerlässlich sind. Aus den Kapiteln zur DFT ist bekannt, unter welchen Bedingungen dies tatsächlich möglich ist, weshalb auch in solchen Fällen die DFT zum Einsatz kommt.

4.2.1. Beispiel: Spektralanalyse

Wir betrachten nun wieder ein Interpolationsproblem und haben dazu 64 Stützstellen der Funktion $f(t)$ gegeben. Diese möchten wir nun mit Summen von Sinus- und Kosinusfunktionen möglichst *glatt* mit Hilfe der DFT rekonstruieren. Dazu benutzen wir die Gl.41-43, allerdings interessieren uns keine analytischen Lösungen; alle Rechnungen werden mit *Matlab* numerisch ausgeführt und die Ergebnisse daraufhin geplottet. Sei die Funktion nun folgendermaßen gegeben

$$f(t) = 2 \cos(2\pi\nu_1 t) - 3 \sin(2\pi\nu_2 t) - \cos(2\pi\nu_3 t) + 2 \sin(2\pi\nu_4) + 2.5 \cos(2\pi\nu_5)$$

mit $\nu_1 = 2, \nu_2 = 4, \nu_3 = 4, \nu_4 = 7, \nu_5 = 12$

Wir plotten nun die gegebenen Stützstellen sowie die berechneten Fourierkoeffizienten und stellen fest, dass wir bei einem derartigen Problem bereits die Periode der gegebenen Punktmenge kennen müssen. In unserem Fall ist diese bekannt mit $T = 1$, allerdings

sollen die Auswirkungen gezeigt werden, wenn wir eine Stützstelle (in unserem Fall die letzte) weglassen. Bekanntlich tritt in so einem Fall der sog. *Leackage*-Effekt auf, den wir zusammen mit den gegebenen Werten in Abb.12 darstellen.

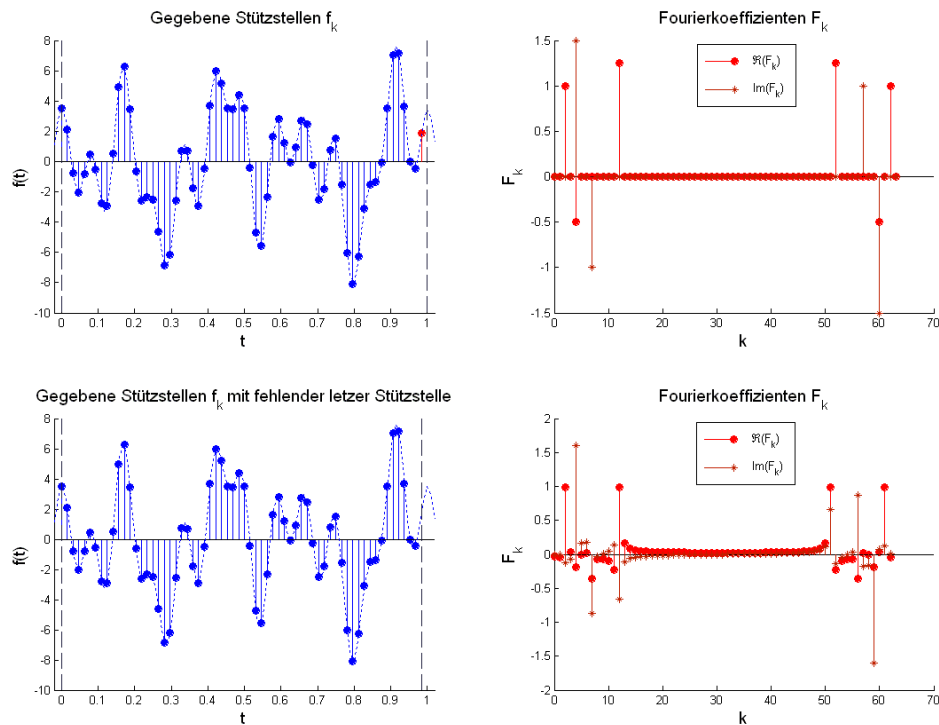


Abbildung 12: Oben: Darstellung der gegebenen Stützstellen und der daraus berechneten Fourierkoeffizienten. Unten: Fehlende letzte Stützstelle und daraus resultierende kleinere Periode T (strichlierte schwarze Linie) sowie Verschiebung im Fourierraum zur Illustrierung des *Leackage*-Effekts.

Im Falle des Fehlens der letzten Stützstelle könnte man den *Leackage*-Effekt fast gar nicht beheben, da nicht einmal eine ganze Periode der Funktion gegeben ist. Würden die Stützstellen über die erste Periode 'hinweglaufen', so wäre das aber kein Problem:

Wenn man die beiden Spektren der Stützstellen vergleicht so haben sie eine große Ähnlichkeit; bei der unteren Darstellung treten lediglich mehr spektrale Komponenten auf, die ein bisschen gegenüber den 'Originalen' verschoben sind. Hätte man also Stützstellen gegeben gehabt, die über eine Periode hinweg verteilt sind, könnte man bewusst die letzten Stützstellen weglassen und jeweils das Ergebnis im Spektrum betrachten. Es ist klar, dass die eigentliche Periode der gesuchten Funktion $f(t)$ dann gefunden wäre, wenn möglichst wenige Peaks im Spektrum auftreten und diese möglichst steil sind.

Es gibt noch eine Menge Möglichkeiten, Abschneidefehler zu korrigieren bzw. diese bewusst zu berücksichtigen; für unser Beispiel reicht die Diskussion insofern, dass wir nun wissen, dass es gerechtfertigt ist, die Periode mit $T = 1$ als bekannt anzunehmen.

Wir betrachten also unsere Fourierkoeffizienten (siehe Tab.2) und bilden mit deren Hilfe die Interpolationsfunktion aus Gl.43.

Frequenz ν_k	Fourierkoeffizienten F_k
2	1
4	$-0.5 - 1.5i$
7	$-i$
12	1.25
52	1.25
57	i
60	$-0.5 - 1.5i$
62	1

Tabelle 2: Mit Hilfe der DFT berechnete Fourierkoeffizienten zu den jeweiligen Frequenzen ν_k

Im Gegensatz zu den Beispielen 7 und 8, bei denen wir zur Berechnung der Interpolationsfunktion die Summe in Gl.43 von $j = -\frac{N}{2}$ bis $j = \frac{N}{2} - 1$ bildeten, demonstrieren wir an diesem Beispiel, was passiert wäre, wenn wir dieselbe Gleichung ohne veränderte Indizes verwendet hätten.

In einem solchen Fall sehen wir (siehe dazu Abb.13), dass die berechnete Interpolationsfunktion zwar eine korrekte Interpolationsfunktion darstellt, allerdings nicht die ursprünglich Gegebene. Offensichtlich oszilliert sie viel mehr, was dadurch erklärt wird, dass aufgrund der größeren j -Indizes (da ja die Summe nun von $j = 0$ bis $j = N$ gebildet wurde) auch die in der Interpolationsfunktion vorkommenden Frequenzen ν_j größer sind. Um die weiteren Schritte unserer Rechnung verständlich zu machen, formen wir die Interpolationsfunktion aus Gl.43 wie folgt um:

$$I(t) = \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{\frac{2\pi i j}{T} t} = \sum_{j=0}^{N-1} \left[F_j \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) + i F_j \sin\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) \right]$$

Da für unsere Darstellung nur der Realteil der Interpolationsfunktion interessant ist, können wir weiter umformen und gelangen schließlich zu einer Darstellung, die unserer Rechnung besser entspricht:

$$\Re\{I(t)\} = \sum_{j=0}^{N-1} [\Re\{F_j\} \cos(2\pi\nu_j t) + \Im\{F_j\} \sin(2\pi\nu_j t)],$$

mit $\nu_j = \frac{j}{T}$.

Nun wissen wir aber aus vorherigen Überlegungen, dass die Folge der Fourierkoeffizienten ebenfalls periodisch ist und die Koeffizienten vom Intervallende herumgewrappt werden können. Diese Tatsache nützen wir aus und nehmen folgende Verschiebung an den Frequenzen vor (die Fourierkoeffizienten bleiben aufgrund der Periodizität unverändert):

$$\nu_j = \frac{j - N}{T} \quad \text{für } j = \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1$$

Bestimmen wir nun die Interpolationsfunktion mit diesen 'verschobenen' Frequenzen, erkennen wir, dass diese exakt unsere gesuchte Funktion $f(t)$ darstellt. Siehe dazu Abb.13. Dieser Vorgang der *Frequenzoptimierung* stellt eine von vielen Möglichkeiten zur Datenglättung mit Hilfe der DFT dar und wird bei nahezu allen Interpolationsproblemen automatisch verwendet.

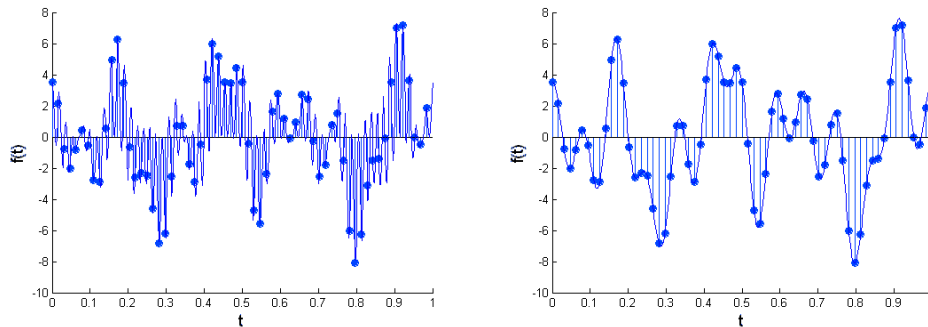


Abbildung 13: Links: Darstellung der berechneten Interpolationsfunktion ohne Frequenzoptimierung. Rechts: Interpolationsfunktion mit Frequenzoptimierung.

4.2.2. Beispiel: Rauschverminderung

Die Situation sieht etwas anders aus, wenn man es mit Funktionenwerten bzw. Stützstellen zu tun hat, die selber einem Fehler unterliegen. In der Anwendung kommt dieser Fall häufig vor, da die meisten Messapparaturen abgesehen vom Messfehler einen statistisch verteilten Fehler (Rauschen bzw. *Noise*) produzieren, den man nur durch wiederholte Messvorgänge bis zu einem gewissen Grad minimieren kann. Wird aber das Signal-Rausch-Verhältnis klein bzw. befindet sich das Rauschen in der Größenordnung des Signals selbst, so wird es sehr schwer, das eigentliche Signal zu erkennen und nachzuweisen. In der Folge werden einige Methoden zur Rauschunterdrückung mittels DFT vorgestellt, wobei gesagt werden soll, dass es ebenso andere Methoden zur Behandlung von Rauschen gibt, die im Grunde auf denselben Prinzipien beruhen.

Ausgangspunkt ist nun die Funktion $f(t)$, von der 256 Stützstellen im Intervall $t \in [0; 4]$ gegeben sind:

$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[2e^{-2(t-1)^2} + 2e^{-(t-3)^2} + \frac{1}{3} \sin(10t) \right]$$

Wie in Abb.14 dargestellt, unterliegen die 256 Stützstellen einer Normalverteilung mit $\sigma = 0.5$, was dazu führt, dass die ursprüngliche Funktion sehr schwer erkannt werden kann, da σ in etwa so groß wie das Signal selbst ist.

Zur Abbildung sei noch zu sagen, dass wir die Überlegungen bzgl. *Wrapping* aus dem vorangehenden Beispiel übernommen und so automatisch den optimalen Frequenzbereich

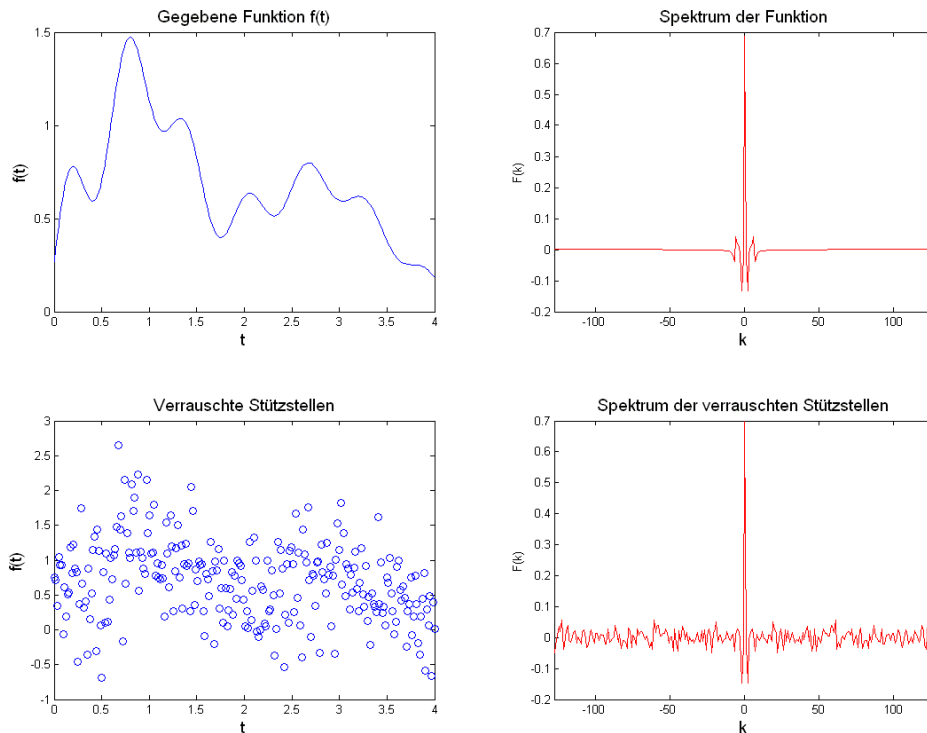


Abbildung 14: Oben: Darstellung der originalen Funktion $f(t)$ und ihres Spektrums. Unten: Verrauschte Datenwerte mit $\sigma = 0.5$ und daraus resultierendes verändertes Spektrum.

geplottet haben. Übersichtshalber wurde nur der Realteil der Fourierkoeffizienten geplottet, alle nachfolgenden Überlegungen betreffen aber sowohl den Real- als auch den Imaginärteil der Fourierkoeffizienten.

Würden wir nun mit unseren Fourierkoeffizienten eine Interpolationsfunktion errechnen, so bekämen wir - wie gewohnt - eine Kurve die durch alle gegebenen Stützstellen geht und in unserem Fall stark oszillieren wird. Wir wissen aber, dass starke Oszillationen durch hohe Frequenzen im Spektrum verursacht werden; um die Kurve nun entsprechend zu glätten, werden wir daher bemüht sein, diese hohen Frequenzen möglichst gut zu beseitigen. Es gibt verschiedenste Methoden, dies zu tun, von denen wir nun folgende drei anwenden werden:

1. Da wir wissen, dass hohe Frequenzen zu starken Oszillationen führen, setzen wir einfach alle Frequenzen für $|k| > k_0$ Null und berechnen aus den so übrig gebliebenen Fourierkoeffizienten unsere Interpolationsfunktion. In unserem Fall nehmen wir $k_0 = 8$. Diese Methode wird auch oft *Dirichlet*-Methode genannt.
2. In den meisten Fällen kann man annehmen dass hohe Frequenzen eher kleine Amplituden haben, was zu der Überlegung führt, dass man eine obere Schranke S be-

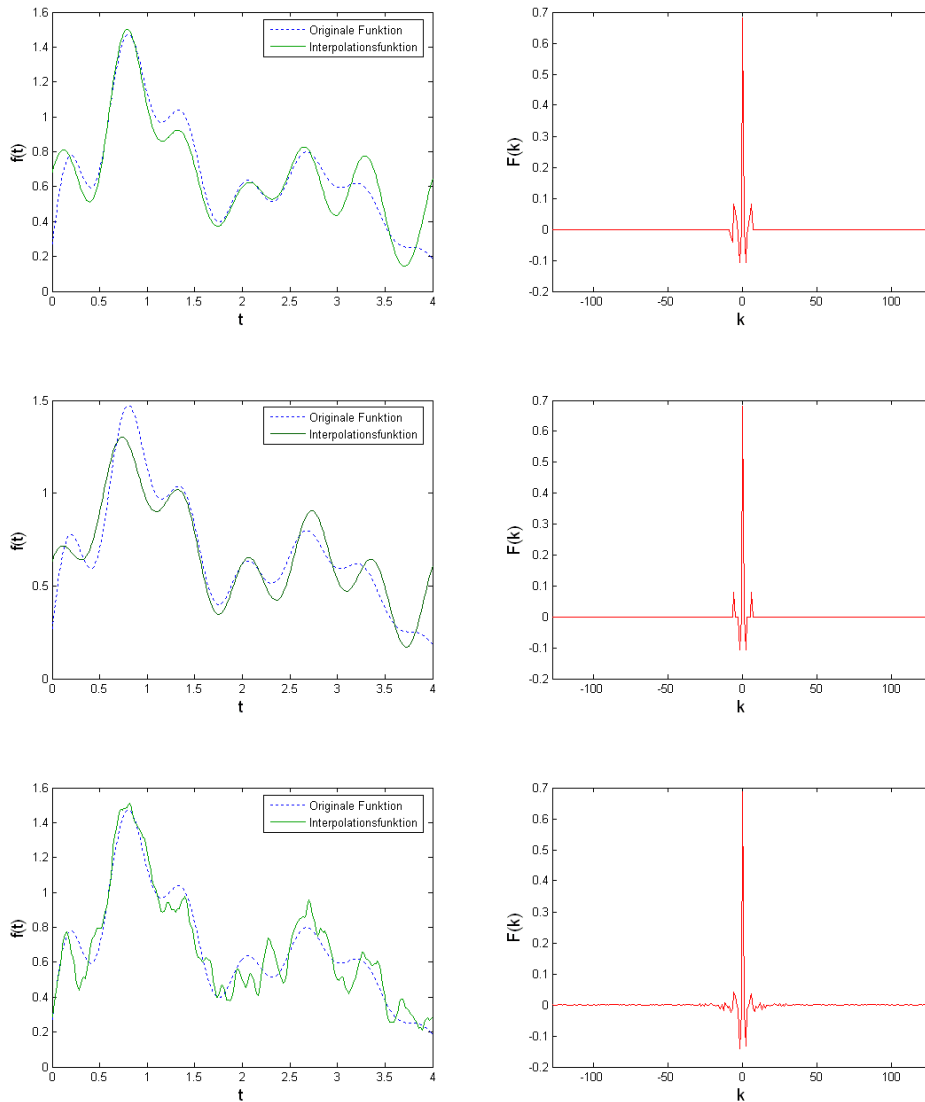


Abbildung 15: Darstellung der berechneten Interpolationsfunktion und deren spektrale Zusammensetzung im Vergleich zur originalen Funktion $f(t)$. Von oben nach unten: 1-*Dirichlet*-Methode, 2-Unterdrückung kleiner Fourierkoeffizienten, 3-Tiefpassfilter nach Tikhonov

stimmen könnte, der zufolge alle Fourierkoeffizienten, die kleiner als diese sind, Null gesetzt werden; alle, die größer sind, bleiben unverändert. In unserem Fall haben wir diese Schranke mit $S = 0.07$ gewählt.

3. Eine ebenso wirksame Methode, die auch in anderen Fällen oft eingesetzt wird, ist die Methode nach Tikhonov. Hierbei handelt es sich um eine einfache Tiefpassfilterung: Die Fourierkoeffizienten F_j werden mit einer Funktion $G = \frac{1}{1+\alpha_j^2}$ multipliziert

('gewichtet'), was ebenfalls dazu führt, dass für hohe Frequenzen (hoher Index j) der Betrag der Koeffizienten entsprechend verkleinert wird. Bei unserem Beispiel wurde $\alpha = 0.01$ gewählt.

Wir plotten die jeweils auf verschiedene Arten erhaltenen Interpolationsfunktionen im Vergleich zur 'originalen' Funktion in Abb.15 und erkennen, dass wir mit allen drei Methoden die Funktion $f(t)$ relativ gut rekonstruieren jedoch gewisse Abweichungen nicht vermeiden konnten. Es lässt sich i.A. nicht sagen, welche Methode generell die beste ist und die Funktion am besten rekonstruiert. In unserem Fall ergibt sich mit der *Dirchlet*-Methode die glatteste Kurve und in der Tat kommt es bei Wiederholung der Tests vor, dass die anderen beiden durch stärker oszillierende Kurven ersetzt werden (da die Verauschung ja eine statistische Verteilung darstellt und somit die Kurven von einem Test zum anderen doch mehr oder weniger stark variieren).

In der Praxis hat man es i.A. nicht mit so einem starken Rauschen - wie hier behandelt - zu tun, was die gesamte Angelegenheit natürlich erleichtert. Trotzdem zeigt sich an diesem Beispiel die Leistungsfähigkeit der DFT zur Rauschverminderung. Rein optisch gesehen wäre es nämlich unmöglich gewesen, die Funktion zu rekonstruieren; trotzdem konnten mit Hilfe der DFT relativ brauchbare Ergebnisse erzielt werden.

4.2.3. Beispiel: Kreuzkorrelation

In Kap.3.3.4 haben wir bereits die Korrelation zweier Funktionen und deren Bedeutung kennengelernt und geschlossen, dass die Korrelationsfunktion die 'Ähnlichkeit zweier Funktion (gegenüber einer Verschiebung in der Abszisse) darstellt'.

Dazu betrachten wir nun ein konkretes physikalisches Beispiel, wie es in etwa bei der Entfernungsmessung (z.B. *Echolot*) verwendet wird. Hierbei wird von einer Schallquelle eine kurze Zeit lang ein Signal ausgesendet, das dann reflektiert und wieder an der (Signal)Quelle detektiert wird. Anhand der Laufzeiten kann dann die Entfernung zum Hindernis (wo die Reflexion des Signals stattfindet) ermittelt werden. Dazu benutzt man die folgende Beziehung

$$c = \frac{2d}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{\Delta t c}{2}$$

wobei d für die Entfernung zum Hindernis, Δt für die Laufzeit des Signals von der Quelle zum Hindernis und wieder zurück und c für die Geschwindigkeit des Signals im jeweiligen Medium steht.

Daher wird es in unserem Interesse liegen, die Laufzeit Δt möglichst genau zu bestimmen. Wir gehen nun von einer sinusförmigen Quelle aus, die alle 4 Zeiteinheiten ein Signal der Form

$$s(t) = \begin{cases} \sin(20\pi t) & \text{für } t \in [0; 1], \\ 0 & \text{für } t \in (1; 4) \end{cases}$$

aussendet. Es handelt sich also um ein periodisches Signal mit der Periode $T = 4$ und wir werden ebenso ein periodisches Signal mit einer gewissen Verzögerung als Antwort (*Echo*) erwarten, das wir in unserem Fall mit

$$e(t) = \begin{cases} \alpha \sin[20\pi(t - 2)] & \text{für } t \in [2; 3], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wählen. Wir nehmen also eine Verzögerung von zwei Zeiteinheiten an und berücksichtigen mit dem Vorfaktor $\alpha = 0.05$, dass die Intensität des *Echos* $e(t)$ i.A. viel kleiner sein wird als die des ursprünglichen *Signals* $s(t)$. Nun stellen wir das Signal $s(t)$, das Echo $e(t)$ sowie deren Korrelationsfunktion $k = s \odot e$ in Abb.16 dar und erkennen, dass sich die maximale Korrelation nach zwei Zeiteinheiten einstellt, was dadurch erklärt wird, dass - wenn die eine Funktion um diesen Betrag gegenüber der anderen verschoben wird - sich die Funktionen maximal überlappen.

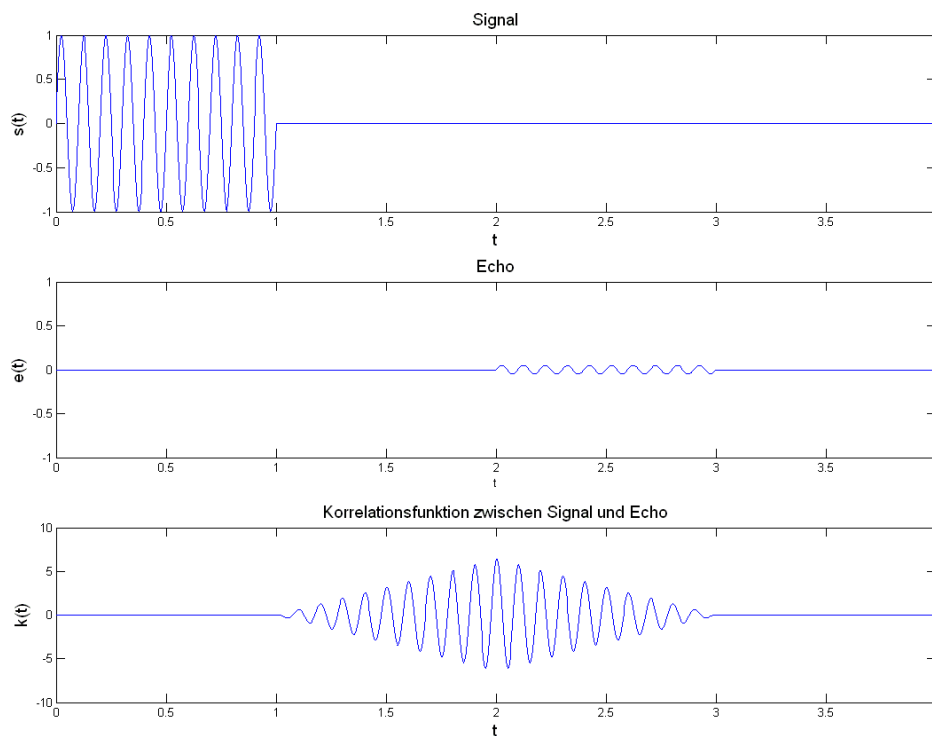


Abbildung 16: Darstellung der Signalfunktion $s(t)$, des Echos $e(t)$ und der Korrelationsfunktion $k(t)$ (von oben nach unten).

Wir lesen daher aus der Korrelation der Signalfunktion mit der Echo-Funktion ab, dass die beiden Funktionen um $\Delta t = 2$ Zeiteinheiten gegeneinander verschoben sind, womit sich bereits die Entfernung leicht berechnen lässt.

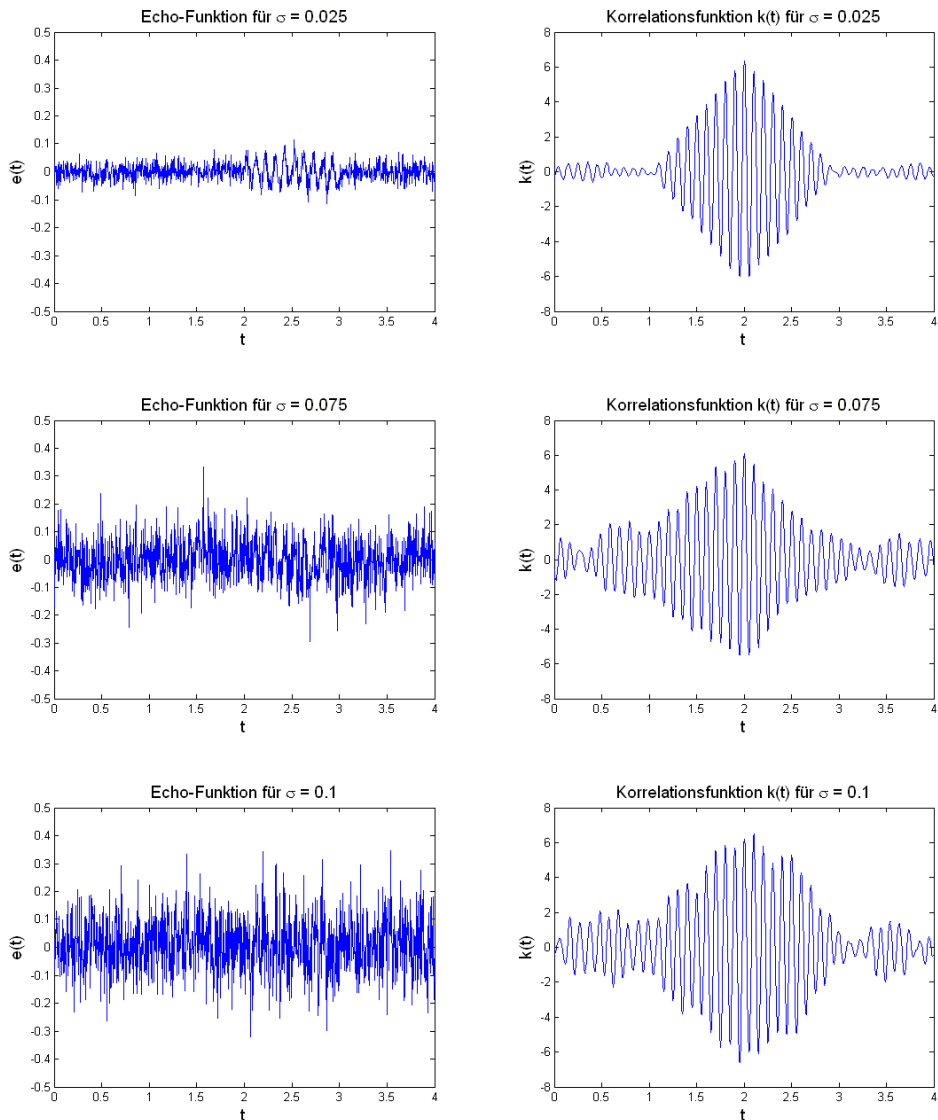


Abbildung 17: Darstellung der Echo-Funktionen mit der dazugehörigen Korrelationsfunktion für verschiedene σ_k -Werte der statistischen Normalverteilung. Von oben wurden $\sigma_1 = 0.025$, $\sigma_2 = 0.075$ und $\sigma_3 = 0.1$ benutzt.

In der Praxis kommen allerdings zwei störende Elemente hinzu:

- Betrachten wir im besonderen Fall ein Echolot (oder Sonar), das in Wasser eingesetzt wird, ist klar, dass bei großer Entfernung d das Echo-Signal relativ klein sein wird, was zunächst aber wenig Einflüsse auf die Korrelationsfunktion hat (diese bleibt gut erkennbar, auch wenn sich Signal und Echo um mehrere Größenordnungen unterscheiden). Die Korrelationsfunktion wird aber bei sehr kleinen Echo-Signalen ebenso kleiner und kann im Grenzfall nicht mehr erkannt werden.

- Das Echo wird i.A. ebenso mit einem statistischen Fehler (Rauschen) überlagert werden, der durch verschiedene Einflüsse des Übertragungsmediums verursacht wird. Vor allem bei großen Tiefen (bzw. großen Entfernungen) verfälscht sich das Echo-Signal enorm, wodurch es schwierig wird, dieses eindeutig nachzuweisen.

In der Folge betrachten wir drei Beispiele mit unterschiedlichen *Noise*-Werten indem wir zur ursprünglichen Echo-Funktion jeweils normalverteilte Fehler mit verschiedenen Standardabweichungen σ_k addieren. Wir gehen jeweils von derselben Signalfunktion $s(t)$ aus. Für die σ_k -Werte wählen wir $\sigma_1 = 0.025$, $\sigma_2 = 0.075$ und $\sigma_3 = 0.1$. Nun können wir das Ergebnis in Abb.17 darstellen.

Aus den Ergebnissen lässt sich allgemein folgern, dass auch bei übermäßigem Rauschen die Korrelationsfunktion sehr gut erkennbar ist und das Maximum bei $T = 2$ sehr gut zur ursprünglichen Funktion passt. Hätten wir dieses Beispiel nicht mit Hilfe der Kreuzkorrelation gelöst, wäre es schlichtweg unmöglich, eine Überlappung der Signale festzustellen, weshalb nun die wichtige Bedeutung der Korrelation in der Technik ansatzweise erklärt ist. Weiters verhelfen wir uns bei dieser Rechnung der DFT indem wir das Korrelationsintegral aus Gl.37 nicht direkt lösen, sondern die Funktionenwerte einer DFT unterziehen und daraufhin das Produkt zwischen der einen Fouriertransformierten und dem Komplexkonjugierten der Anderen berechnen. Nach der Rücktransformation mittels iDFT gelangt man dann direkt zur Korrelationsfunktion.

5. Zusammenfassung

Die Thematik rund um die Fouriertransformationen erstreckt sich über viele Gebiete der Physik und Mathematik. Es war im vornhinein klar, dass im Zuge dieser Bachelor-Arbeit nicht alle Bereiche abgedeckt werden konnten, weshalb zumindest versucht wurde grundlegende Fragestellungen zu erklären und zu begründen. So sind die mathematischen Grundlagen etwas ausführlicher ausgefallen, um vor allem Physikern die Mathematik hinter dieser Theorie klar zu präsentieren. Wie in der Einleitung hinsichtlich der verwendeten Notation bei Sätzen und Definitionen bereits angemerkt soll an dieser Stelle nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, dass man bei verschiedener Wahl der Literatur jeweils anderen Schreibweisen und Definitionen begegnet. Vor allem bei Verwendung von FFT-Programmen ist es daher sehr wichtig, sich die jeweils verwendeten Algorithmen näher anzuschauen.

Ansonsten kann abschließend gesagt werden, dass für ein vertiefendes Studium über die Fouriertransformationen die in dieser Arbeit verwendete Literatur sehr zu empfehlen ist.

A. Literaturverzeichnis

/1/ K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, München, 2003.

/2/ K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag, München, 2003.

/3/ E. A. González-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic Press Inc., San Diego, 1995.

/4/ H. Wallner, *Analysis 1-4*, Vorlesungsskripten 2004-2006.

/5/ P. Devries, *Computerphysik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.

/6/ C. Überhuber, *Computer-Numerik*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

/7/ T. Butz, *Fouriertransformation für Fußgänger*, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003.

/8/ H. Sormann, *Numerische Methoden in der Physik*, Vorlesungsskriptum 2006.

/9/ H. Sormann, *Ausgewählte Kapitel aus 'Numerische Methoden in der Physik'*, Übungsskriptum zu VU 2007.